

# Capítulo 1

## El estado del arte.

1. Introducción .....	3
2. El arco .....	8
2.1. Reconocimiento .....	8
2.2. La forma curva.....	9
2.3. En busca de la directriz óptima .....	10
2.4. Rebajamiento del arco .....	14
2.4.1. Diseño del arco .....	14
2.4.2. Empuje sobre los estribos .....	15
2.5. Tipología objeto de estudio .....	16
3. Bases de cálculo.....	16
4. Métodos de cálculo .....	19
4.1. Método de los desplazamientos.....	19
4.2. Métodos energéticos .....	24
4.3. Método de los elementos finitos.....	25
5. Pandeo de arcos.....	27



# Capítulo 1

## El estado del arte.

### 1. Introducción.

1999. Centenario del nacimiento de Eduardo Torroja Miret. La recién creada Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos logra que la exposición itinerante organizada para conmemorar el evento recale en Ciudad Real.

El marco en el que se ubicó la exposición sólo consiguió reforzar la sensación de belleza y equilibrio de la obra de Torroja. El rehabilitado edificio del Rectorado de la Universidad de Castilla-La Mancha, antigua Casa de la Caridad de Ciudad Real, y su Paraninfo, albergaban fotografías, cuadros, réplicas de documentos y maquetas que, entre los gruesos muros, las amplias ventanas, la deliciosa iluminación y el suave crepitar de la madera del suelo ante los pasos del visitante, le acercaban a las reflexiones del rememorado ingeniero.



Figura 1.1. Tríptico de la exposición conmemorativa del centenario del nacimiento de Eduardo Torroja.

Mi conocimiento sobre Torroja hasta ese momento era muy limitado, pues únicamente relacionaba su nombre con el hormigón armado, y más

concretamente con el momento tope. Sin embargo, el evento conmemorativo me presentó la obra de un Ingeniero, que se recorría a través de dieciséis proyectos con comentarios del autor, reflexiones que se digerían con fruición y que invitaban a más.



Figura 1.2. Maqueta del Hipódromo de la Zarzuela. Proyecto de E. Torroja (1935).

Los enormes paneles de bonito diseño, repletos de facsímiles de proyectos y de fotografías de distintos momentos en la ejecución de las obras, dividían la estancia en zonas gobernadas por una idea o un proyecto, de manera que el laberinto artificial creado entre la obra de Torroja acabó desembocando en una profunda atracción. Atracción por las formas, por las soluciones y por la persona.

Y quizás, a pesar de la pureza de las líneas de sus estructuras laminares, a pesar de sus avanzadas propuestas para solucionar los problemas que surgían en sus singulares estructuras, lo que más llamó la atención al reiterativo visitante fue un pequeño hangar, situado en el aeródromo de Cuatro Vientos.

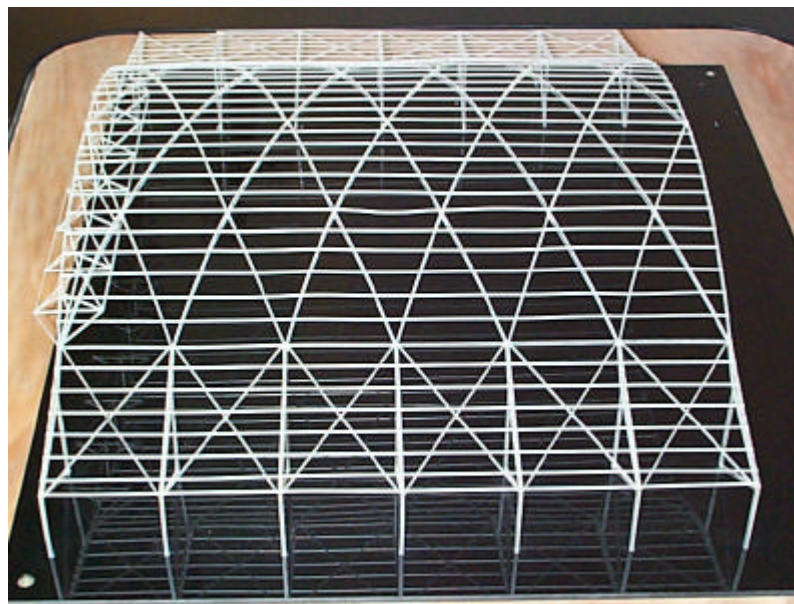


Figura 1.3. Maqueta del Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).

El Ministerio de Fomento, con motivo del centenario del nacimiento del ingeniero, editó *Las estructuras de Eduardo Torroja*, una obra de 1958 publicada en inglés, con poca difusión en nuestro país. Con respecto al Hangar de Cuatro Vientos, Torroja escribe:

*«Las correas de la cubierta de este hangar apoyan sobre arcos metálicos de 35 metros de luz, que se cruzan entre sí formando una bóveda reticulada de gran rigidez, capaz de soportar el empuje de viento sobre los cerramientos verticales.*

*Los arcos descansan sobre ménsulas que arrancan de pórticos laterales. Sin embargo, el empuje horizontal de los arcos no es soportado por estos pórticos, sino que se transmite a los de los extremos, los cuales, triangulados para tener la rigidez necesaria, son capaces de soportar la suma del empuje horizontal de todos ellos. En consecuencia, cada una de las dos mitades de la estructura de cubierta trabaja como una especie de viga triangulada inclinada, apoyada contra su gemela, de gran rigidez a pesar de su ligereza.»*



Figura 1.4. Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).

En el Hangar de Cuatro Vientos Torroja logra con estructura metálica el equilibrio entre estética y resistencia. La aparente sencillez de la estructura, la belleza proporcionada por los arcos cruzados que arrancan del voladizo de los pórticos laterales, me seducen. La necesidad de comprender las soluciones constructivas adoptadas me llevan a contactar con la dirección de AENA, organismo responsable del aeródromo de Cuatro Vientos, con la intención de visitar el hangar. La sorpresa por el buen estado de conservación de la edificación es grande, destinada en la actualidad a taller de reparaciones de helicópteros de la Guardia Civil. *In situ* se pudo realizar una análisis inicial de la

estructura y detectar modificaciones estructurales respecto a la documentación conseguida.



Figura 1.5. Detalle de la cubierta del Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).

La admiración creció aún más al profundizar en el cálculo, pues la actividad docente del autor le llevó a codirigir un proyecto fin de carrera en el cual se adaptaba la estructura del hangar a un polideportivo (Rozalén, 2000), adecuando las soluciones constructivas de Torroja a los condicionantes económicos actuales.

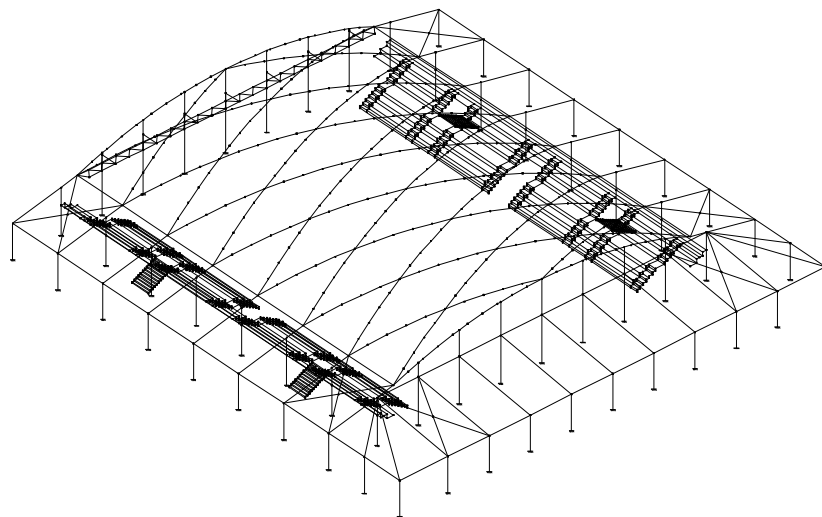


Figura 1.6. Proyecto de Polideportivo (Rozalén, 2000).

En esta época, sumido en el estudio de los arcos, me sorprendió recibir un folleto del Grupo Español de IABSE (International Association for Bridge and Structural Engineering) que, sobre una fotografía que transformaba sus grises originales en ocres, anunciaba un seminario sobre «Tendencias en normativa y

diseño en estructuras metálicas de edificación». La imagen recogía un aspecto del montaje de la estructura del hangar de Torroja, con lo que comprendía que la seducción de las formas resistentes y armónicas de esta estructura de acero sobrepasaría con creces el siglo de su creación.

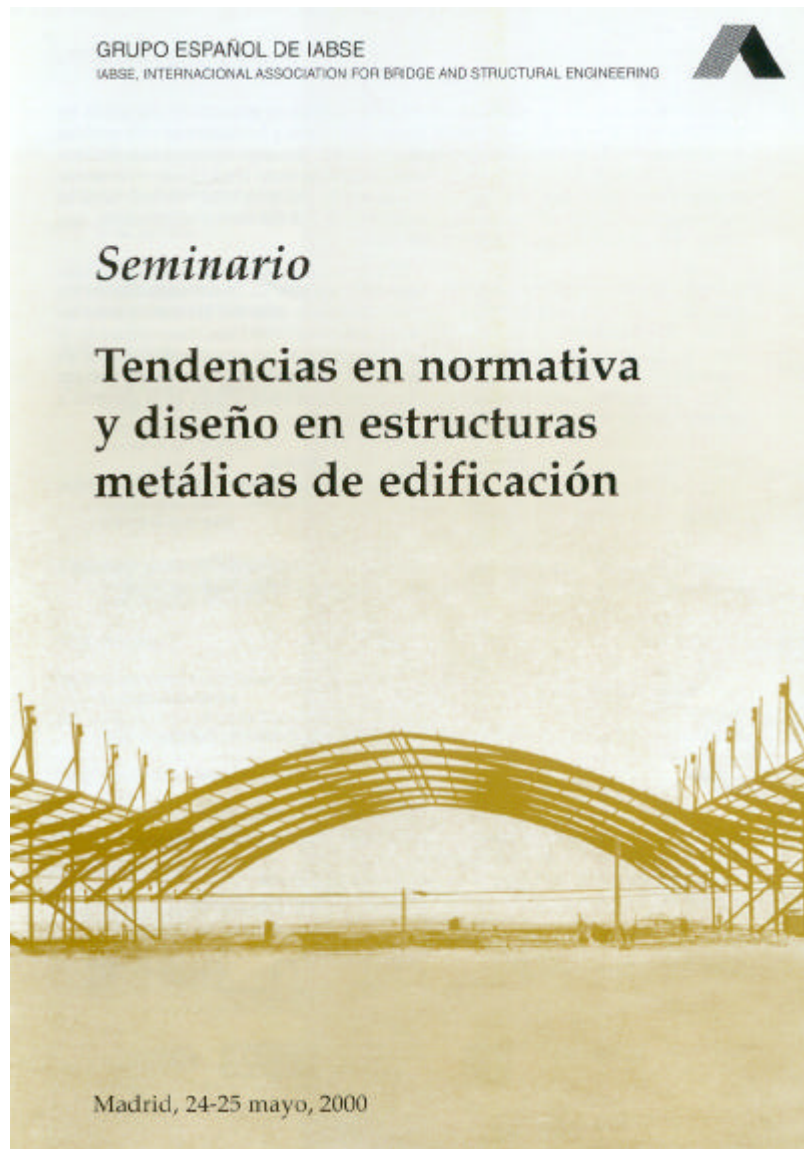


Figura 1.7. Tríptico del Grupo Español de la IABSE anunciando un Seminario sobre «Tendencias en normativa y diseño en estructuras metálicas de edificación».

El profundo conocimiento del comportamiento estructural de las formas y materiales de Torroja provenía de una laboriosidad proporcional a su ingenio. Así, se conservan los expedientes de proyectos que no se llevaron a cabo, que ponen de manifiesto el control y el rigor de los estudios realizados por Torroja. Bajo el título de *Hangares desmontables*, proyectos que se realizaron en los años cuarenta para la empresa OMES, de la que el propio Eduardo Torroja fue fundador, se proponían procesos de prefabricación y montaje que anticipaban

la solución adoptada para el Hangar de Cuatro Vientos (Antuña y Pedregal, 2002).

De este modo se gestó el deseo de estudiar el elemento constructivo responsable del aspecto liviano de esta cubierta y de su equilibrada estética: el arco.

## 2. El arco.

### 2.1. Reconocimiento.

Existe una definición de arco, debida a Cayo Julio Lácer, el ingeniero romano que proyectó el puente de Alcántara en el año 106, grabada en la piedra del templete funerario que domina el puente desde su orilla izquierda, que recoge de una manera escueta el mecanismo resistente de estas estructuras: *Ars ubi materia vincitur ipsa sua* (En el arco la materia se vence a sí misma).

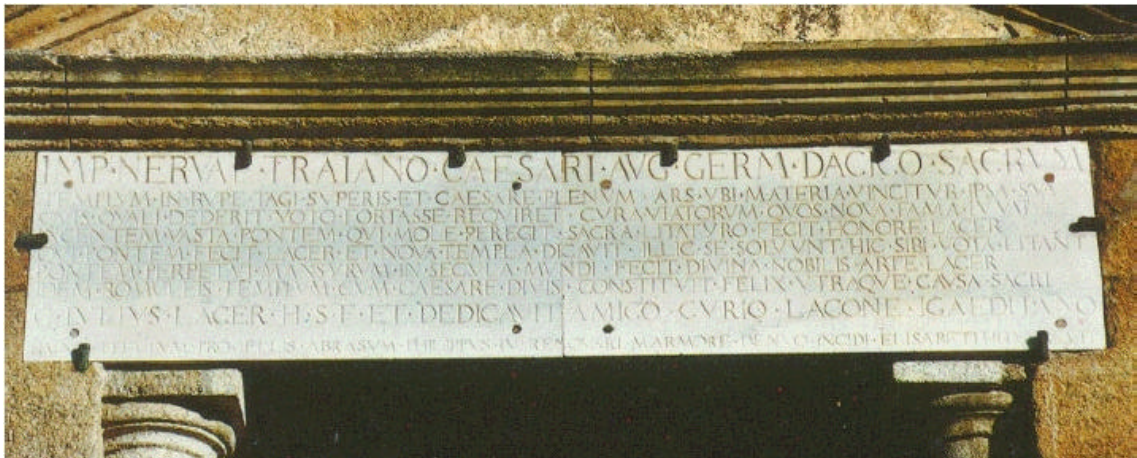


Figura 1.8. Inscripción en el templete funerario del Puente de Alcántara.

Recuperando esta clásica definición de arco se procura hacer ver que el tema de los arcos no es ninguna novedad en el mundo de la ingeniería, pues desde siempre ha habido una gran atracción por el arco y su fenómeno resistente. Sin embargo, hasta bien entrado el siglo XIX no se aplicaron técnicamente los conceptos elementales de la estática gráfica, equilibrio y antifunicularidad. De cualquier forma, independientemente de la aplicación práctica de estos *modernos* conceptos, siempre se reconocerá el arco como el mayor invento tensional del arte clásico (Torroja, 1996).

Torroja (1996), en su admiración por esta sencilla estructura (al menos en apariencia), llega a afirmar:

*«Si la columna es arquitectura pura, el arco es ingeniería; o mejor dicho, -para alejar toda interpretación profesional-, si la columna es arte, el arco es técnica; sin que esto quiera decir, ni que a la columna le falte técnica, ni que el arco sea incapaz de vivísima expresión estética».*

El arco, como antesala de la bóveda, tal vez sea la estructura más brillante que pueda ser concebida (Regalado, 1999).

## 2.2. La forma curva.

A primera vista aparece como cualidad fundamental del arco su forma curva. Sin embargo, esto resulta insuficiente, pues si se apoya isostáticamente una barra arqueada sólo se dispondrá de una viga curva, no de un arco. Hay que considerar las condiciones de sustentación y entonces se encontrará lo esencial de la estructura arco, la existencia de esfuerzos longitudinales de contrarresto, que son los que determinan su forma (Fernández Casado, 1955).

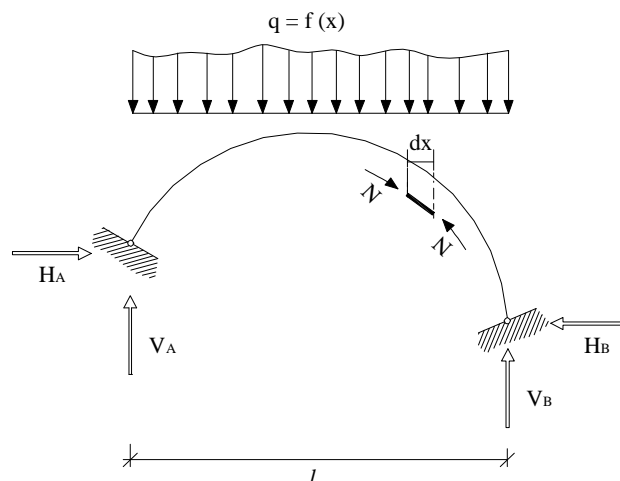


Figura 1.9. Carga vertical, componentes horizontales en las reacciones y esfuerzos longitudinales de contrarresto en un arco.

Es típico del arco generar empujes horizontales sobre los apoyos. La existencia de estas componentes horizontales en las reacciones, pese a que las cargas externas sean verticales, es un hecho que caracteriza a los arcos y los diferencia de las vigas. Los empujes se deben a la imposibilidad de desplazamiento de los estribos, y no a la forma curva de la pieza, ya que los empujes bajo cargas verticales no aparecen si faltan los estribos que impidan la apertura del arco (Argüelles, 1996).

En esencia, ni siquiera la forma curva es necesaria, pues en sentido amplio empieza por ser arco un par de barras acodadas, y se podría incluir en el género las arcadas, los pórticos y otras estructuras reticulares (Fernández

Casado, 1955). Sin embargo, en el estudio que sigue se va a restringir el tipo utilizando precisamente la forma curva, pero no en cuanto se refiere a condiciones puramente geométricas, sino en relación con su adecuación mecánica.

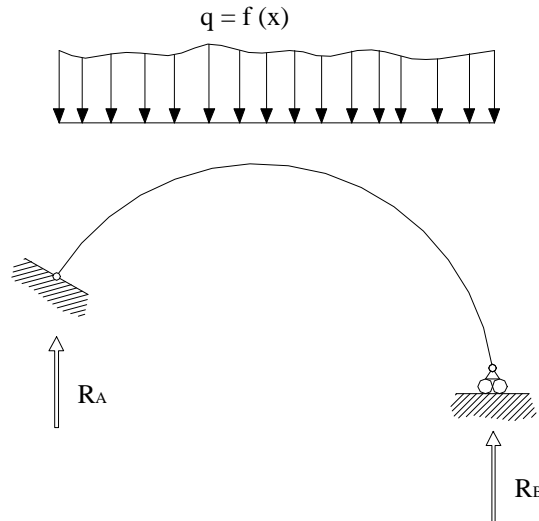


Figura 1.10. Ausencia de componentes horizontales en las reacciones bajo carga vertical en una viga curva isostática.

### 2.3. En busca de la directriz óptima.

Al contrario que en las estructuras reticulares, cuya morfología queda determinada por las condiciones funcionales, en el arco imperan las condiciones estructurales, hasta tal punto que muchas veces la estructura ha de complementarse por exigencias de la función a que está destinada. Por consiguiente, como toda estructura lineal con libertad mecánica, el arco tiene la pretensión de ser configuración de esfuerzos, es decir, funicular de las fuerzas aplicadas. El grado mayor o menor en que esto se logra define la perfección de la estructura. La adecuación total se consigue en muy pocos casos, pues casi siempre lo impide el carácter variable de la sobrecarga (Fernández Casado, 1955).

Para cada conjunto de cargas existe una forma particular (la llamada forma funicular), para la cual todo el arco trabaja a compresión simple. Esta forma puede determinarse colgando las cargas de un cable e invirtiendo la curva resultante. Los arcos funiculares ocupan un extremo de la escala de tensiones, con ausencia de flexión. Cualquier otro elemento estructural curvado hacia abajo resiste las cargas por medio de una combinación de compresión y flexión. Aunque un arco sea funicular para *un* sistema determinado de cargas, no puede serlo para *todos* los sistemas de cargas que pueda estar llamado a resistir: en todo arco existe siempre una combinación de compresión y flexión (Salvadori y Heller, 1998).

Además de las cargas permanentes, las estructuras han de soportar otras cargas variables y/o móviles, por lo que sólo es posible hacer coincidir el eje del arco con el funicular de una determinada posición de la carga exterior y, por consiguiente, no se puede evitar la aparición de momentos flectores en cuanto se modifique la hipótesis de carga (Argüelles, 1981).

Mörsch propuso en 1906 que la directriz de los arcos coincidiera con el funicular de los pesos permanentes. El problema estriba en que para adaptarse a esta curva es necesario conocer a priori la forma y dimensiones de la estructura, por lo que sólo mediante aproximaciones sucesivas se alcanza la solución apropiada.

El peso por metro lineal que carga sobre los arcos aumenta desde la clave a los estribos (figura 1.11 a) y por ello la curvatura de los arcos debería aumentar de forma análoga para ajustarse a la curva funicular.

Si el peso fuese constante, la directriz que se ajustaría al funicular sería una parábola cuadrada.

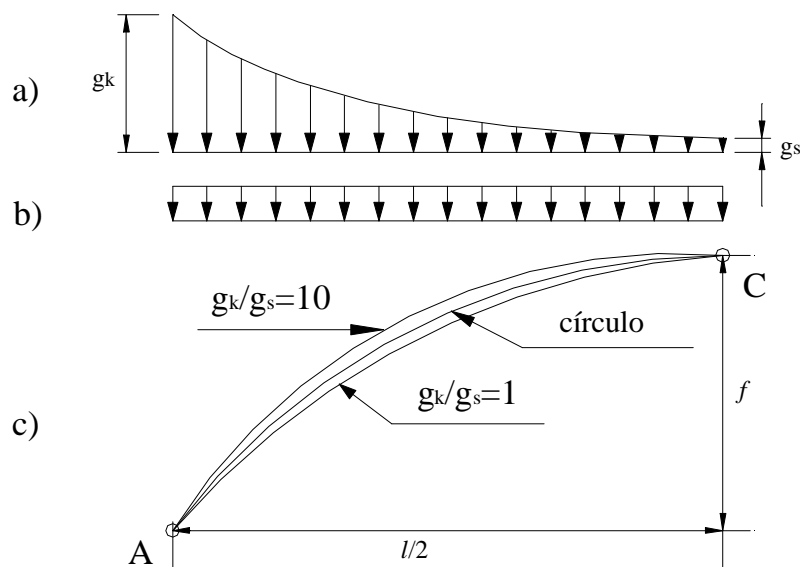


Figura 1.11. Elección de la directriz del arco.

Si se designa por  $g_k$  al peso del metro lineal en el estribo, y por  $g_s$  al peso del metro lineal en la clave, se puede comprobar que cuanto mayor es  $g_k$  con respecto a  $g_s$  la curva funicular se levanta. Así, para un arco de luz  $l$  y flecha  $f$ , en la figura 1.11 c se representan las dos directrices que corresponden a una carga uniformemente repartida (figura 1.11 b) y a una carga en que la relación

$\frac{g_k}{g_s}$  es igual a 10 (figura 1.11 a), caso que en la práctica constituye un valor extremo. El arco circular se sitúa entre ambas directrices.

Para realizar los tanteos en la elección del eje del arco se comienza eligiendo como directriz una curva comprendida entre la parábola y el círculo y se calculan los pesos permanentes de los diversos tramos en que queda dividido el arco, trazándose a continuación el funicular que pase por los puntos A y C (figura 1.11 c). Elegido este funicular como nuevo eje del arco, se vuelven a calcular los pesos correspondientes y el funicular que les corresponde. En la mayor parte de los casos este segundo funicular se admite como eje del arco, ya que nuevos tanteos no dan lugar a diferencias apreciables (Argüelles, 1986).

Moseley y Mery formularon de forma explícita la condición de estabilidad de un arco: basta con que la línea de presiones se encuentre contenida entre las dos líneas que definen el espesor del arco, haciendo trabajar el material a 1/10 de su tensión de rotura.

En el campo de los puentes es donde se puede percibir una mayor inquietud en buscar una cierta antifunicularidad en el diseño de los arcos, si se observan en paralelo a los construidos en la edificación, donde prevalecen criterios mucho más formalistas, sin que ello quiera decir que los puentes se hayan mantenido al margen de las modas arquitectónicas.

Existe abundante literatura sobre la elección de la directriz conveniente del arco. Este tema cobra especial relevancia cuando se trata de grandes luces y fuertes cargas muertas. Aparte del rebajamiento, que suele venir impuesto por condiciones no de tipo resistente, la forma de la directriz viene influida por las cargas muertas y por el tipo de sobrecarga viva que haya de soportar el arco. Los esfuerzos térmicos o de retracción no influyen sensiblemente en la determinación de la directriz (Torroja, 1996).

Para pesos propios del arco solamente y con espesor constante, el funicular es la catenaria. Para carga uniformemente repartida a lo largo de la cuerda, la directriz teórica es la parábola de segundo grado. En la práctica de puentes, con el peso del tablero, tímpanos más o menos aligerados y arcos de espesor variable, van bien las parábolas de cuarto o mejor de sexto grado, como suficiente aproximación a la ley teórica en coseno hiperbólico según Strassner. Cuando la sobrecarga móvil es fuerte respecto al peso propio, la forma de la directriz pierde importancia y lo que se puede hacer es tantear los funiculares y leyes de tensiones máximas para elegir una directriz apropiada (Torroja, 1996).

Los arcos parabólicos tipo Chalos y los arcos tipo Manning también tuvieron gran aceptación en el diseño de puentes durante gran parte del siglo XX.

En los arcos de cubierta, la sollicitación más desfavorable para las condiciones de funicularidad de la directriz es la actuación de viento, pues da lugar a una distribución continua de cargas con presiones y succiones que se aproxima mucho a la distribución antimétrica. Como además éstas se invierten al invertir el sentido de actuación del viento, se tienen siempre momentos flectores de importancia. Si la distribución de cargas del viento fuera perfectamente antimétrica, resultaría la directriz más conveniente la que realiza el antifunicular de la carga permanente, pues las líneas de presiones se desviarían por igual a ambos lados de dicha directriz al actuar el viento en uno u otro sentido. Pero el efecto de las succiones es más importante que el de las presiones, por lo que conviene peraltar el arco en su zona central (Fernández Casado, 1955).

La entrada masiva del acero y del hormigón armado como materiales básicos estructurales produjo una gran revolución en el arte de diseñar y construir los arcos. Estos materiales de gran resistencia, capaces de resistir las tracciones, han hecho posible que las estructuras se aligeren considerablemente de peso frente a las sobrecargas de uso variable, por lo que el trazado de una curva antifunicular resulta ya muy difícil.

Cuando en edificación agroindustrial se recurre a la estética y resistencia del arco, ya denota en el proyectista la búsqueda de una imagen de calidad que destaque sobre la mediocridad general del diseño en el ámbito agroindustrial. Además, las dimensiones que se manejan en este tipo de estructuras, por importantes que puedan ser dentro del campo de la edificación, siempre serán discretas respecto a la construcción civil, sobre todo si se comparan con el uso del arco que se realiza en el trazado de puentes, pasarelas, etc.

Por ello, y teniendo en cuenta el predominio de las sobrecargas variables frente a las cargas constantes, la búsqueda de una directriz que satisfaga una determinada hipótesis de carga pierde relevancia frente a otras consideraciones, como la estética, la singularidad de la edificación, la facilidad del doblado del acero bajo radio constante, etc.

De este modo, la búsqueda de una directriz que se ajuste al funicular de una determinada combinación de cargas no ha tenido el mismo desarrollo en el campo de la edificación que en el campo de la construcción de puentes, donde el factor de escala y la importancia de la magnitud de las cargas, así como la evolución en los materiales de construcción, hacía aconsejable el intento de minimizar la flexión frente a la compresión.

## 2.4. Rebajamiento del arco.

En un arco cualquiera se denomina *línea de arranque* a la línea que une los puntos de apoyo del arco, *luz* ( $l$ ) a la distancia horizontal entre los apoyos y *flecha* ( $f$ ) a la máxima distancia vertical desde la línea de arranque a la directriz. Si el arco es simétrico, la flecha será la distancia entre el punto más alto de la directriz, la *clave*, y la línea de arranque.

Con respecto a este parámetro fundamental en el diseño del arco, el rebajamiento, que determina la relación entre la flecha del arco y su luz, existen dos características íntimamente unidas a la decisión del proyectista de fijar esta magnitud: la estética y el valor del empuje sobre los estribos.

### 2.4.1. Diseño del arco.

En lo que se refiere a diseño, para determinar una relación entre la flecha y la luz en los arcos que sirva como tanteo inicial, existe concordancia entre los diversos autores. Así, Torroja (1996) consideró un intervalo comprendido entre  $1/5$  y  $1/7$ , valor este último que Regalado (1999) aumenta a  $1/8$ , que es la relación más satisfactoria visualmente, mientras que asegura que  $1/5$  es la más eficaz.

Por debajo de un rebajamiento de  $1/10$ , los efectos diferidos y accidentales de segundo orden (retracción, fluencia, temperatura, asientos, etc.) aumentan considerablemente, sobre todo en arcos empotrados y relativamente rígidos. Si el proyectista se mueve en el rango adecuado, dichos efectos no parecen que planteen problemas dignos de consideración.

En fin, el rebajamiento no puede aumentarse excesivamente, no sólo por el excesivo aumento de los empujes horizontales, sino porque se llegaría a un fenómeno de flexión excesiva, e incluso de pandeo ayudado por el acortamiento de la directriz, fenómeno que puede agravarse en los puentes de hormigón, por efecto de la deformación lenta. Fueron precisamente los movimientos de este género en un arco muy rebajado los que condujeron a Freyssinet a inventar su maniobra de apertura de clave (Torroja, 1996).

Por el contrario, al disminuir el rebajamiento más allá de  $1/4$ , el empuje va disminuyendo más lentamente que aquél y pierde interés el peraltado frente a los inconvenientes que lleva consigo (pandeo lateral, etc). Por ello, no se adoptan normalmente estos peraltes sin otras razones que induzcan a ello: forma del valle, aspecto estético, etc. (Torroja, 1996).

### 2.4.2. Empuje sobre los estribos.

Si la directriz del arco siguiese exactamente el funicular de las cargas, la resultante sobre el arranque del arco seguiría la tangente a la directriz; por tanto, en el arranque resulta más tendida y, al mismo tiempo, tanto mayor cuanto más rebajado sea el arco (Torroja, 1996). Por consiguiente, el valor del empuje en el arco queda acotado entre un mínimo correspondiente a la línea de presiones más peraltada y un máximo estable asociado a la más rebajada (Regalado, 1999).

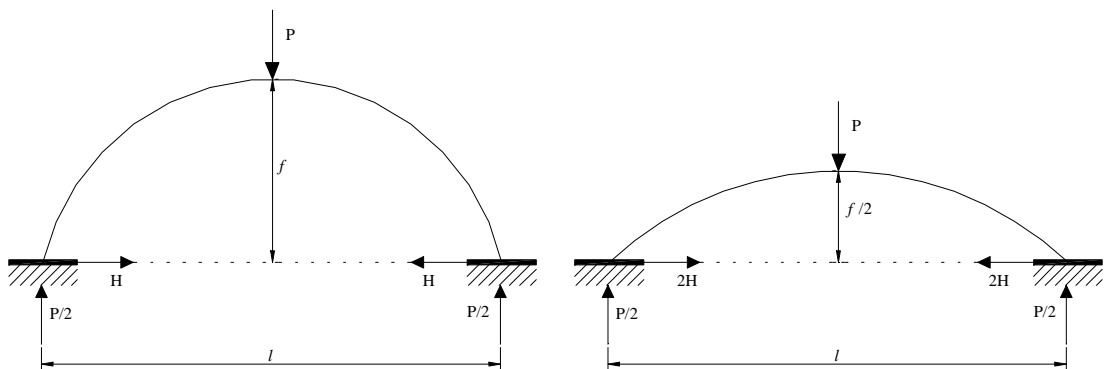


Figura 1.12. Variación del empuje de un arco en función de su flecha.

El empuje es proporcional a la carga y al cuadrado de la luz, e inversamente proporcional a la altura del arco. Para obtener el empuje mínimo con una determinada luz a cubrir, el arco debe ser lo más liviano posible y su altura, la mayor económicamente factible (Salvadori y Heller, 1998). Como aproximación rápida se puede obtener un orden de magnitud del empuje horizontal, como el valor de la carga vertical total del arco por el octavo del rebajamiento, o cociente de la luz por la ságitra del arco (Torroja, 1996).

Por tanto, la existencia de empujes reduce los momentos flectores del arco con respecto a los que existirían en la viga de igual luz, creando en aquél un régimen predominante de compresiones, mucho más favorable que el de flexión simple típico de las vigas (García de Arangoá, 1971).

Estos empujes requieren una buena cimentación o unos buenos contrarrestos, que en el caso de arcos de cubierta implica el dimensionar y reforzar adecuadamente los soportes sobre los que arrancan los arcos, por los importantes esfuerzos que transmiten. Podría lograrse el mismo efecto atirantando el arco, pero el hecho de colocar un tirante a un arco conlleva una pérdida importante de la estética que acompaña a estas estructuras, aunque desde el punto de vista mecánico su utilización está plenamente justificada.

## 2.5. Tipología objeto de estudio.

En primer lugar, como se vislumbra en el título del trabajo, el acero va a ser el material elegido para diseñar los arcos. En edificación agroindustrial, para luces comprendidas entre 20 y 60 metros, el acero se presenta como el material más económico para resistir. En este tipo de edificación, aunque se quiera proyectar con formas atrevidas, la limitación presupuestaria será casi siempre un parámetro fundamental que reducirá las posibilidades de diseño a formas estructurales económicas.

Por ello se ha hecho poco hincapié en los efectos de la retracción y de las deformaciones lentas. Sin embargo, las tensiones térmicas son muy importantes, pues siguen con facilidad las variaciones de temperatura ambiente y aún las superan cuando actúa la radiación solar directamente sobre el metal (Torroja, 1996).

Se van a estudiar arcos biarticulados y biempotrados, con diversas relaciones entre flecha y luz, buscando siempre el aspecto estético en la estructura, por lo que se recomendarán rebajamientos del orden de 1/6 ó 1/8. Las directrices serán parabólicas de segundo grado y circulares, aunque se podrá constatar que en edificación agroindustrial no existen razones de peso para complicar innecesariamente la ejecución material del arco de acero con curvas de radio variable, por lo que la directriz circular será una recomendación clara a la hora de realizar el diseño de los arcos.

García Badell (1999) establece en 1/7 el valor frontera que separa los arcos rebajados  $\left(\frac{f}{l} < \frac{1}{7}\right)$  y los arcos peraltados  $\left(\frac{f}{l} > \frac{1}{7}\right)$ , por lo que tiene interés estudiar un rebajamiento inferior (1/8) y uno superior (1/6) para comprobar la contribución de la deformación debida al esfuerzo axial, sin soslayar la eficacia y la estética del arco. En cambio, García de Arangoá (1971) determina el valor 1/10 como límite entre arcos rebajados y arcos peraltados. Según su criterio, tanto los rebajamientos 1/6 como 1/8 estarían dentro del grupo de arcos peraltados.

## 3. Bases de cálculo.

Para el cálculo de los diferentes tipos de arcos se admite la hipótesis de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, es decir, la ley de Hooke. Asimismo, se supondrá que las deformaciones no alteran las líneas de acción de las fuerzas que componen la sollicitación exterior, por lo que se calcula el estado tensional considerando el arco como indeformable, y se admite la validez del

principio de superposición, que determina que el efecto de un grupo de causas es igual a la suma por separado de las diferentes causas (Oliver y Ortiz, 1970; Argüelles, 1996).

Se supone que su plano de curvatura es también un plano de simetría para cada una de las secciones transversales y que las fuerzas externas aplicadas al arco actúan solamente en aquel plano de simetría. En tales condiciones, la deformación tendrá lugar en ese plano y el problema de análisis será bidimensional.

Si la sección transversal del arco no es simétrica con respecto al plano de curvatura, o si las cargas se aplican normalmente a este plano, se producirá torsión y entonces la barra no se puede considerar propiamente como un arco. (Dávila y Pajón, 1997). En todo lo que sigue no se tendrán en cuenta las condiciones que conducen a la torsión.

Referidas estas bases de cálculo, la hipótesis fundamental para el estudio de los arcos es que su curvatura es pequeña en comparación con las dimensiones transversales de su sección, o lo que es lo mismo, que el radio de curvatura es mucho mayor que el canto de la sección. Esta simplificación es aplicable normalmente si la relación entre el radio de curvatura y el canto es superior a 10 (Argüelles, 1986; Celigüeta, 1998).

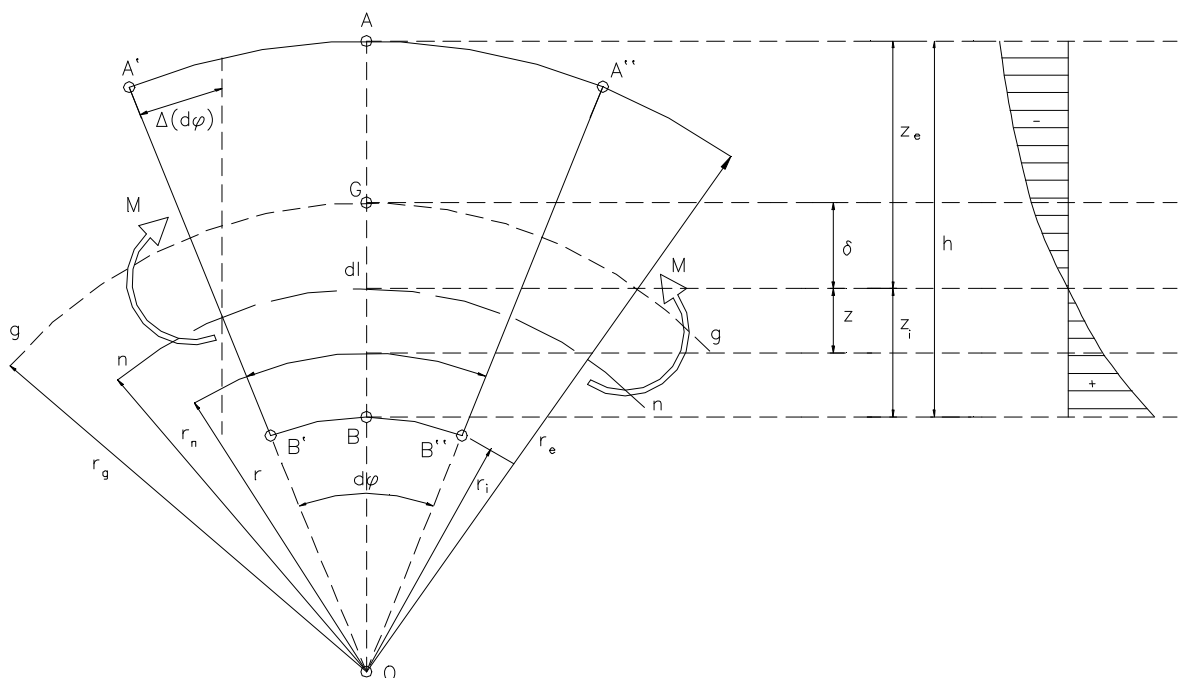


Figura 1.13. Distribución de tensiones en una pieza prismática de directriz curva.

En vigas, piezas prismáticas de directriz recta, las tensiones que produce un momento flector  $M_y$  vienen dadas por la ecuación:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad [1.1]$$

que representa un reparto lineal de la tensión a lo largo de la sección transversal. En piezas prismáticas de directriz curva, bajo la acción del momento  $M$ , la tensión  $s_x$ , calculada bajo la hipótesis de Bernoulli (que dicta que la sección transversal permanece plana después de la deformación), no se reparte linealmente sino hiperbólicamente (figura 1.13), y la fibra neutra no se sitúa en el centro de gravedad  $G$  de la sección sino a una distancia  $d$  de él.

En una pieza de directriz curva sometida a flexión pura por la acción de un momento  $M$  positivo, se puede comprobar cómo el valor de la tensión normal difiere entre la cara convexa y la cara cóncava, siendo en esta última mayor al ser menor su radio de curvatura que el de la cara convexa. De este modo, el eje neutro  $n-n$  deja de coincidir con la fibra media  $g-g$  que une los centros de gravedad de las diversas secciones transversales, y se desplaza hacia la cara cóncava una distancia  $d$  igual a:

$$\delta = r_g - r_n$$

siendo  $r_g$  el radio de la fibra media y  $r_n$  el radio de la fibra neutra.

La tensión  $s_x$  se puede expresar, para una fibra genérica distante  $z$  de la fibra neutra, como

$$\sigma_x = \frac{M}{A \cdot \delta} \cdot \frac{z}{r} \quad [1.2]$$

siendo  $A$  el área de la sección y  $r$  el radio de la fibra considerada.

Si la sección es rectangular,  $\delta = \frac{h}{12 \cdot r_g}$ , por lo que cuando la relación

entre el radio de curvatura de la fibra media y el canto  $\frac{r_g}{h}$  supera el valor de 10, como sucede claramente en los arcos, la diferencia entre la tensión  $s_x$  obtenida por las expresiones [1.1] y [1.2] es insignificante. De hecho, para una relación  $\frac{r_g}{h} = 10$ , el error es del 3.2 por mil, y tiende hacia cero rápidamente

cuando aumenta la razón  $\frac{r_g}{h}$  (Argüelles, 1986).

La suposición de pequeña curvatura hace que no sea necesario aplicar una teoría especial de piezas curvas, sino que es directamente aplicable la teoría convencional de flexión de vigas, considerando únicamente que el dominio de la estructura es curvo. Los primeros trabajos sobre arcos empleando estas hipótesis se deben a Navier (1826) y a Bresse (1854).

## 4. Métodos de cálculo.

De las múltiples formas en que un ingeniero puede abordar el problema del cálculo de los arcos, tres serán las que se desarrollen para comprobar las expresiones y los resultados obtenidos.

La exposición se va a iniciar con el método de los desplazamientos, que resuelve la cuestión con una perspectiva pedagógica, al seguir en el análisis de las deformaciones el desarrollo del fenómeno físico correspondiente.

En segundo lugar se van a estudiar las expresiones obtenidas a partir de métodos que se pueden englobar bajo el nombre de «energéticos». Estos métodos hacen intervenir una entidad física como el trabajo elástico, la energía de deformación o la energía potencial total, etc, prescindiendo de las expresiones de las deformaciones elementales que remiten directamente a las fórmulas fundamentales de la flexión, la compresión y la cortadura.

Por último se va a desarrollar la resolución de arcos por el método de los elementos finitos, herramienta potente que en la actualidad va reemplazando a los sistemas anteriores en el cálculo de todo tipo de estructuras.

Existen otros métodos de cálculo que no van a ser desarrollados por estar en desuso en nuestros días, aunque fueron utilizados con profusión en la primera mitad del siglo pasado. Entre ellos cabe citar el método de la analogía de la columna de Hardy Cross y el método de la elipse central de inercia.

### 4.1. Método de los desplazamientos.

Este método tiene su origen en la aplicación de las fórmulas de Bresse, que permiten calcular los corrimientos de los puntos de la directriz del arco, así como los giros experimentados por cualquier sección recta del prisma mecánico.

Si se analiza el problema estructural del arco desde el punto de vista de los desplazamientos y de las deformaciones, se manifiesta que al actuar las

solicitaciones tienden a desplazar a la estructura en bloque, a lo que se oponen las reacciones de sustentación, que logran el equilibrio del sistema.

El equilibrio entre acciones y reacciones se logra a través de la estructura, la cual canaliza los esfuerzos y queda en tensión, produciéndose deformaciones, que en último término representan la única realidad patente y sensible (Fernández Casado, 1955).

Las reacciones se calculan a partir de la teoría de las deformaciones, expresando analíticamente las condiciones en que han surgido.

Para desarrollar el método de las deformaciones se recurre a la superposición de dos estados de carga. El primero corresponde a una estructura isostática virtual obtenida a partir del arco hiperestático original. El segundo estado de carga completa la estructura isostática con las reacciones hiperestáticas propias del arco inicial.

Dos problemas aparecen a la hora de estudiar un arco hiperestático. El primero es la transformación de la estructura en otra isostática que sirva de punto de partida. El segundo se refiere al modo de calcular las deformaciones de la estructura auxiliar.

Para lograr el isostatismo se puede reducir el arco a viga curva o a voladizo. Conseguir la viga curva a partir del arco hiperestático es sencillo, pues basta liberar un apoyo de las restricciones superabundantes: el empuje en los arcos biarticulados y el empuje y el momento de empotramiento en los arcos biempotrados. El arco en voladizo o pescante puede conseguirse por cuatro caminos<sup>(\*)</sup> (Fernández Casado, 1955):

- Liberando una de las extremidades (figura 1.14)

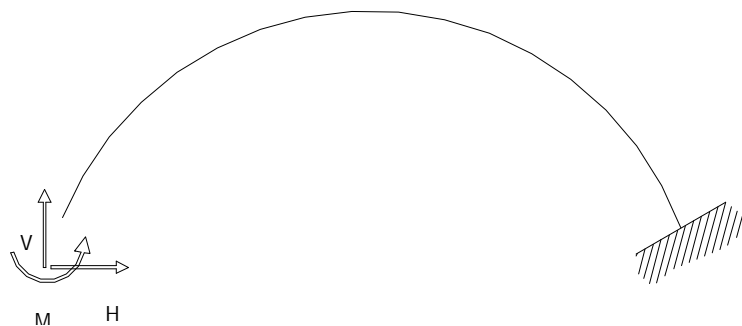


Figura 1.14. Arco en voladizo obtenido al liberar un apoyo.

<sup>(\*)</sup> Se expresan todas las modalidades posibles de conversión de la estructura hiperestática para hacer ver que el método es extensivo a todo tipo de arco hiperestático, y no sólo a los arcos biarticulados y biempotrados objeto de estudio.

- Complementando la transformación anterior mediante la prolongación del arco con una barra de rigidez infinita que termina en el centro elástico (figura 1.15)

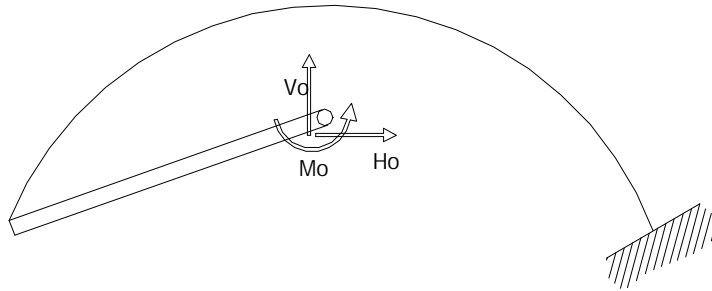


Figura 1.15. Arco en voladizo con extremo libre unido al centro elástico.

- Cortando el arco por la clave (en general por una sección cualquiera), con lo que se obtienen dos voladizos (figura 1.16).

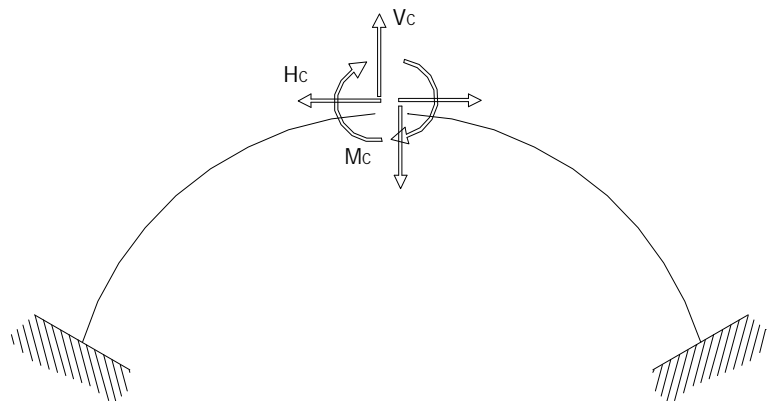


Figura 1.16. Arco biempotrado cortado por la clave.

- Si cada uno de estos voladizos se enlaza al centro elástico del arco por una barra de rigidez infinita obtenemos la última variante (figura 1.17).

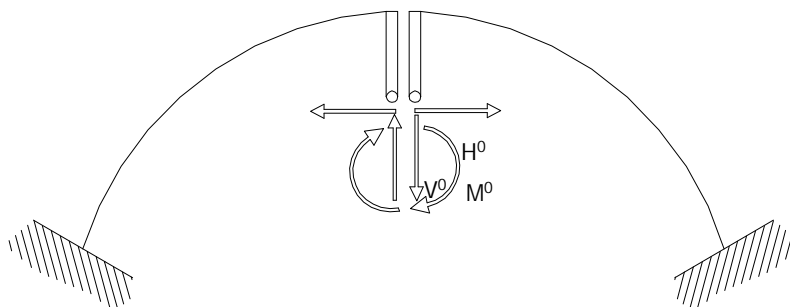


Figura 1.17. Variante para obtener arcos en voladizo a partir de un arco biempotrado.

Una vez que se tiene el arco isostático, se calculan las reacciones mediante las ecuaciones que proporciona la Estática. Después se somete a esta estructura virtual a la reacción de las acciones hiperestáticas que se encargan de anular las deformaciones incompatibles con las condiciones de sustentación.

En los arcos hiperestáticos las incógnitas son siempre más de tres, seis en el caso del arco biempotrado. Por consiguiente, se necesitan otras ecuaciones que expresen las condiciones de indeformabilidad debidas al sistema de sustentación.

- La primera de estas condiciones es la *invariabilidad de la luz* [1.3], que es suficiente en el caso del arco de dos articulaciones (sólo cuatro incógnitas).

$$\delta_B = 0 \quad [1.3]$$

- La segunda condición es la *ausencia de desnivelación entre apoyos* que, junto con la anterior, resuelve el problema del arco de una sola articulación, donde las incógnitas son cinco.

$$\begin{aligned} \delta_B &= 0 \\ \Delta_B &= 0 \end{aligned} \quad [1.4]$$

- La tercera condición es que *el giro relativo de las dos secciones extremas es nulo*, y con ella se obtienen las tres ecuaciones complementarias [1.5] para resolver el problema general del arco empotrado.

$$\begin{aligned} \delta_B &= 0 \\ \Delta_B &= 0 \\ \theta_B &= 0 \end{aligned} \quad [1.5]$$

Como ya se ha indicado, tras conocer las estructuras isostáticas que sirven de partida para el análisis del arco hiperestático, el segundo problema básico para el estudio de un arco es el cálculo de las deformaciones, y concretando más, de las deformaciones de una extremidad con respecto a la otra.

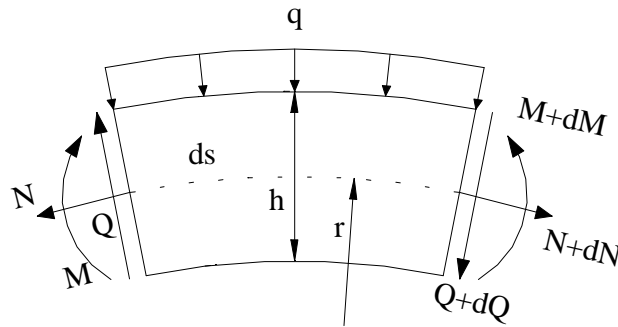


Figura 1.18. Esfuerzos en una rebanada de arco bajo carga.

La continuidad geométrica del arco permite el análisis diferencial de una rebanada aislada (figura 1.18), en cuyas secciones transversales infinitamente próximas se producen los esfuerzos  $M$ ,  $N$  y  $Q$ . Si se estudia por separado la deformación que produce cada fuerza de sección, se tiene que el momento flector  $M$  produce un giro de la sección, el esfuerzo normal  $N$  ocasiona una translación o desplazamiento longitudinal y el esfuerzo cortante  $Q$  un corrimiento o desplazamiento transversal de la sección.

La acción conjunta de estas deformaciones elementales, al superponerse, permite obtener la deformación de un punto cualquiera de la directriz, que será una etapa intermedia para conocer las deformaciones relativas de un extremo del arco con respecto al otro, definidas por las expresiones [1.6], que se determinarán en el Capítulo 2.

$$\begin{aligned}\delta &= \int_0^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx + \int_0^l \alpha \cdot \frac{Q}{G \cdot A} \cdot dz + \int_0^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot z \cdot ds \\ \Delta &= \int_0^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dz - \int_0^l \alpha \cdot \frac{Q}{G \cdot A} \cdot dx - \int_0^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot x \cdot ds \\ \theta &= \int_0^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds\end{aligned}\quad [1.6]$$

En estas ecuaciones,  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $G$  el módulo de elasticidad transversal del material,  $A$  el área de la sección transversal,  $I$  el momento de inercia de la sección transversal y  $\alpha$  el factor de forma de la sección transversal.

Con posterioridad se calcularán los esfuerzos en cualquier punto de la directriz, y por último se determinarán las reacciones de las estructuras hiperestáticas estudiadas.

## 4.2. Métodos energéticos.

Esta denominación recoge una serie de modos de calcular arcos estáticamente indeterminados mediante la aplicación de teoremas muy utilizados en el cálculo de estructuras, y que tienen como punto de partida el empleo de entidades no tangibles, tales como la energía de deformación o el trabajo elástico. Así, entre los principios o teoremas referidos se puede citar el segundo teorema de Castigliano, el teorema del mínimo trabajo, -en ellos se apoyan Timoshenko y Young (1981), y García de Arangoá (1971)-, el principio de los trabajos virtuales, o el teorema de Maxwell-Betti o de la reciprocidad de los recorridos, en los que basan su formulación Leontovich (1971) o Celigüeta (1998).

Si se analiza un elemento diferencial de arco, en el que se designa por  $M$ ,  $N$  y  $Q$  los esfuerzos de cualquier sección transversal, con los sentidos positivos que se indican en la figura 1.18, por ser el canto  $h$  de la sección transversal pequeño respecto al radio de curvatura  $r$  de la directriz del arco, se puede emplear para determinar la energía de deformación por flexión  $U_f$  la expresión:

$$U_f = \int_0^s \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot I}$$

Esta expresión es semejante a la que se emplea en vigas rectas, con la aparición de la variable  $s$ , que representa la longitud de la directriz del arco.

Del mismo modo se puede determinar la energía de deformación por cortante  $U_c$  mediante la expresión:

$$U_c = \int_0^s \alpha \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot A}$$

Al ser los arcos esbeltos, esta magnitud es pequeña comparada con la debida a la flexión, por lo que es común despreciarla (Timoshenko y Young, 1981; Celigüeta, 1998).

Finalmente, para la energía de deformación por compresión directa  $U_t$ , se tiene:

$$U_t = \int_0^s \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot A}$$

Así, la energía de deformación total del arco queda definida por:

$$U = \int_0^s \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot I} + \int_0^s \alpha \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot A} + \int_0^s \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot A} \quad [1.7]$$

Si además se tiene en cuenta los efectos de la temperatura, esta expresión se completa de la forma (García de Arangoá, 1971):

$$U = \int_0^s \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot I} + \int_0^s \alpha \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot A} + \int_0^s \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot A} + \int_0^s N \cdot \alpha_t \cdot t \cdot ds + \int_0^s M \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot ds \quad [1.8]$$

donde  $\alpha_t$  es el coeficiente de dilatación térmica,  $Dt$  es el incremento de temperatura respecto a una situación de referencia y  $\frac{\Delta t}{h}$  representa el gradiente de temperatura entre trasdós e intradós.

Partiendo de esta expresión y aplicando convenientemente los teoremas adecuados se determinarán los esfuerzos en cualquier sección, así como las reacciones buscadas.

### 4.3. Método de los elementos finitos.

Este método determina el comportamiento de una estructura sometida a acciones exteriores, sustituyendo la solución continua y exacta de las ecuaciones diferenciales que expresan el equilibrio de un elemento diferencial genérico por una solución discontinua o discreta, y por tanto, aproximada.

Salvo las estructuras reticulares, la mayor parte de las estructuras en ingeniería son de naturaleza continua y, por tanto, su comportamiento no puede expresarse en forma precisa en función de un número pequeño de variables discretas. Por ello, la exactitud de los resultados sólo podrá alcanzarse en estructuras de barras.

Aunque las estructuras continuas son tridimensionales, en algunos casos su comportamiento se puede describir adecuadamente con modelos matemáticos uni o bidimensionales, siempre que se pueda hacer uso de hipótesis simplificadoras.

Para analizar un arco por el método de los elementos finitos a partir de su geometría, apoyos y cargas que actúan, es necesario establecer en primer lugar un modelo matemático apropiado para describir su comportamiento. En este trabajo dos son los modelos matemáticos que se van a utilizar: el modelo

que se basa en la teoría de la flexión de vigas de Timoshenko (Capítulo 4) y el que se funda en la teoría clásica de Euler-Bernoulli (Capítulo 5).

Es común en el método de los elementos finitos denominar con un nombre específico al elemento base de la discretización. Así, en cualquier publicación del método son frecuentes las referencias a elementos de barra, de viga, de placa, de lámina, etc, y dentro de esta denominación genérica se particulariza en función del modelo matemático empleado. Por ejemplo, se habla de elementos de viga de Timoshenko y elementos de viga de Euler-Bernoulli, según se haya utilizado un modelo u otro.

En esta fase de la aplicación del método es necesario determinar con detalle las características del material de la estructura, aspecto sencillo en esta obra al limitarse únicamente a arcos de acero.

En segundo lugar se procede a discretizar la estructura en porciones que no intersecten entre sí, que se denominan «elementos finitos». Dependiendo del tipo de problema, el elemento finito será uni, bi o tridimensional, y estará constituido por un número discreto de «nodos». En general, la malla de elementos finitos puede estar constituida por elementos de diferente geometría.

Una vez comentada la norma general de nombrar un elemento en función del tipo de problema y del tipo de modelo matemático empleado, la forma de discretizar un arco también puede ser influyente a la hora de denominar el elemento en cuestión. Así, si se decide discretizar el arco plano estudiado en elementos curvos, se acepta el nombre de elemento de viga curvado (Saleeb y Chang, 1987; Benedetti y Trally, 1989; Dorfi y Busby, 1994; Raveendranath y col, 1999) frente al más simple elemento de arco (Oñate, 1995, 2002).

Una manera más sencilla de discretizar un arco plano consiste en hacerlo mediante elementos rectos. De este modo, cuando el elemento finito es una barra recta sometida a cargas externas que provocan, en el caso más general, una situación conjunta de compresión y flexión (compresión compuesta o flexión compuesta, dependiendo del predominio de una u otra), la denominación es más compleja y también más confusa. Existe la tendencia de designar al elemento finito como elemento de Timoshenko o elemento de viga de Timoshenko, solicitado únicamente a flexión, acoplando el efecto de la compresión mediante un elemento de barra (Bathe, 1996; Hughes, 2000; Zienkiewicz y Taylor, 2000a). En este trabajo se ha optado por la denominación de elemento de pórtico plano. Únicamente en las referencias bibliográficas Arndt (2001), Baresi y col. (2003) y Kattan (2003) aparece este nombre, sin que en ellas se desarrolle la formulación que define el elemento en su totalidad.

El elemento de pórtico plano puede basarse en el modelo de Timoshenko (Capítulo 4) o en el de Euler-Bernoulli (Capítulo 5), obteniéndose formulaciones distintas que se desarrollan en los capítulos citados.

En tercer lugar, a partir de la expresión del principio de los trabajos virtuales (Oñate, 1995; Zienkiewicz y Taylor, 2000a) o el principio de la energía potencial total (Bathe, 1996; Hughes, 2000, Felippa, 2001a) se obtienen las matrices de rigidez y el vector de cargas para cada elemento finito (matrices y vectores locales, referidas al sistema de coordenadas asociado al elemento).

Posteriormente se procede al ensamblaje de las matrices de rigidez y el vector de cargas equivalentes de todos los elementos de la malla, obteniéndose las matrices globales, referidas al sistema de coordenadas general del arco. Así, se obtiene el sistema de ecuaciones del arco,

$$[K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad [1.9]$$

donde  $[K]$  es la matriz de rigidez global del arco,  $\{a\}$  el vector de desplazamientos de los nodos y  $\{f\}$  el vector de cargas de la estructura.

Una vez establecida la ecuación matricial de gobierno de la estructura, se resuelve el sistema de ecuaciones. Una vez calculados los movimientos nodales  $\{a\}$  se pueden calcular las deformaciones y, posteriormente, las tensiones en cada elemento así como las reacciones en los nodos con movimientos prescritos.

El enorme número de ecuaciones que genera el método sólo puede ser resuelto con métodos matriciales, haciendo uso de la potencia de cálculo de los ordenadores. Así, el desarrollo del método de los elementos finitos ha ido íntimamente unido al avance de la electrónica digital aplicada a los computadores.

## 5. Pandeo de arcos.

La mayor parte de la información disponible sobre el pandeo de arcos se refiere a aquéllos cuya directriz es el funicular de las cargas, es decir, que no sufren flexiones en ninguno de sus puntos anteriormente al pandeo. Por tanto, se está en un caso similar al del soporte comprimido (Escrig, 1985).

Como toda pieza comprimida, el arco sufre los peligros del pandeo, si bien al estar fijos los arranques, el arco tiende a tomar una configuración de pandeo más resistente que en el caso de un soporte, cuyos extremos pueden

aproximarse al producirse el pandeo. En consecuencia, la esbeltez admisible del arco puede ser mayor que la del soporte (Torroja, 1996).

El estudio del pandeo de arcos se complica respecto al de la barra recta, pues en ésta el esfuerzo longitudinal que da origen al pandeo es, en general, independiente de la sollicitación de flexión de la pieza, mientras que en el arco la compresión longitudinal deriva de la sollicitación principal y viene, por tanto, directamente afectada por los momentos flectores complementarios de deformación (Fernández Casado, 1955).

Son habituales los estudios de pandeo de arcos centrados en una tipología concreta, fundamentalmente referidos a modelos base de puentes. En la referencia Fernández Casado (1955) puede encontrarse el análisis del pandeo de arcos simétricos con carga antimétrica, con carga simétrica y diversos tipos de sustentaciones, siguiendo la metodología que introdujo Dischinger (1937) para el estudio de arcos parabólicos con inercia reducida constante.

Sin embargo, esta concreción en los análisis de pandeo carecen de la generalidad necesaria para hacerlos extensivos a todos los tipos de arcos y de cargas.

Si se considera un arco como un pórtico con un número infinito de cortos tramos (Salvadori y Heller, 1998), se está muy cerca del razonamiento empleado para discretizar el arco en elementos finitos rectos. De este modo, la utilización de métodos de cálculo de pandeo para cualquier sistema plano de barras es aplicable en arcos, sin restricciones debidas a la forma de la directriz, a las sustentaciones o al tipo de carga.

De entre los métodos lineales de cálculo, el método matricial es el que permite analizar el pandeo global del arco, obteniendo la matriz geométrica de la estructura y determinando los autovalores. Los autovectores asociados permiten calcular los desplazamientos nodales de los nodos libres del arco al iniciarse el pandeo, definiendo la forma modal de pandeo del arco.

Por último, aprovechando la potencia de cálculo de las aplicaciones informáticas basadas en el método de los elementos finitos, se va a realizar el cálculo no lineal del pandeo. La no linealidad puede ser debida a propiedades de los materiales o a problemas de geometría.

Generalmente en la resolución de problemas lineales se considera que las deformaciones y desplazamientos en la estructura estudiada son pequeños, tal y como se ha referido en las bases de cálculo. Físicamente significa que la geometría de los elementos no varía durante la actuación de las fuerzas

exteriores, y que las deformaciones pueden aproximarse de forma lineal y asimilarse a infinitésimos de primer orden (Zienkiewicz y Taylor, 2000b).

En la práctica, dichas hipótesis fallan algunas veces, aún cuando las deformaciones reales sean pequeñas y no se sobrepasen los límites elásticos de los materiales que ordinariamente constituyen las estructuras. Este problema clásico de inestabilidad se va abordar a través de la aplicación informática ANSYS, empleando el procedimiento iterativo de Newton-Raphson, descrito en Ralston (1970) y Pruneda (2003).