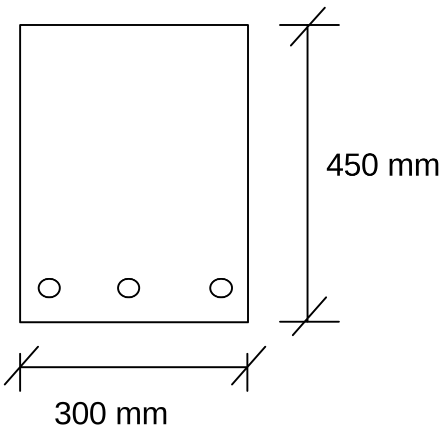
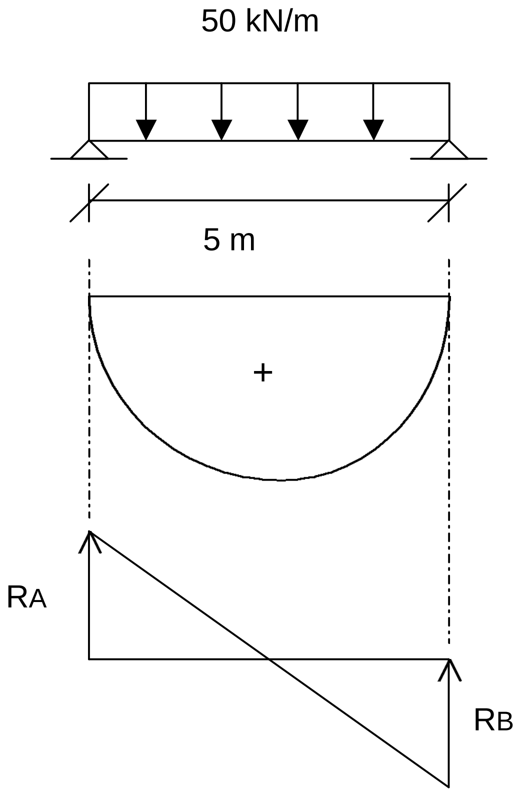
En una estructura de hormigón armado prefabricado, se desea calcular la armadura necesaria (longitudinal y transversal) de una viga biapoyada de 5 m de luz y de sección rectangular (b x h = 300 x 450 mm) que está sometida a una carga uniformemente repartida de 50 kN/m.

Realizar las comprobaciones de flexión, cortante y fisuración. Además, determinar si es necesario realizar la comprobación a flecha.

Datos: Límite elástico del acero (f_{yk}) = 510 N/mm^2. Resistencia característica del hormigón: (f_{ck}) = 35 N/mm^2.





Cálculos previos

Al ser una viga isostática, es sencillo calcular el flector y el cortante máximo, así como conocer las secciones que soportan estos máximos:

$$M_{máx} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{50 \cdot 5^2}{8} = 156.25 \ \ m \cdot kN$$

$$R_A = R_b = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{50 \cdot 5}{2} = 125 \, kN$$

Como el enunciado no nos hace referencia a ninguna limitación de ambiente, consideramos que la viga se encuentra en un Ambiente IIb (Exteriores, en ausencia de cloruros, expuestos a lluvia en zonas con precipitación media anual inferior a 600 mm) y los recubrimientos que adoptamos, suponiendo que el diámetro de los redondos de tracción va a ser 20 mm y que la armadura transversal va a estar constituida por barras de diámetro 8 mm, serán:

$$r_{nom} = \Delta r + r_{min} = 0 + 25 = 25 \, mm$$

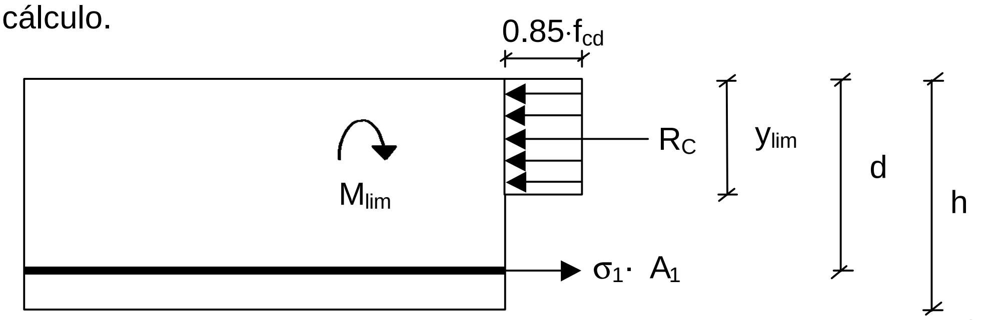
Al tratarse de hormigón prefabricado, suponemos un control de ejecución intenso, por lo que hemos utilizado un margen de recubrimiento *Dr* de 0 mm

$$d' = r_{nom} + \phi_c + \frac{1}{2}\phi = 25 + 8 + \frac{1}{2} 20 = 43 \, mm$$

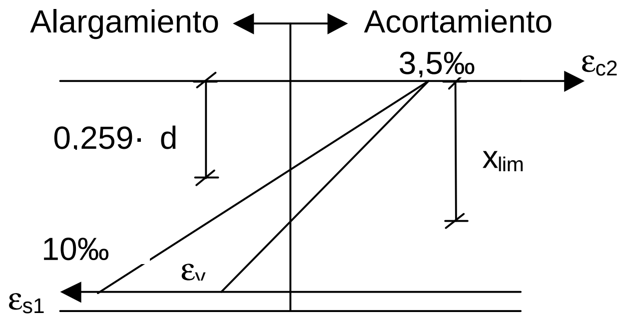
$$d = h - d' = 450 - 43 = 407 \, mm$$

Cálculos a flexión

Obtenemos el momento límite con objeto de saber si es necesario colocar armadura de compresión en el centro del vano desde el punto de vista estricto de cálculo.



$$M_{lim} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot y_{lim} \cdot \left(d - \frac{y_{lim}}{2} \right)$$



Por la ecuación de compatibilidad de las deformaciones, $\frac{\varepsilon_{yd}}{d - x_{lim}} = \frac{\varepsilon_{c2}}{x_{lim}}$

Como $\varepsilon_{c2} = 3.5\,‰$ y $\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E} = \frac{\frac{f_{yk}}{\gamma_s}}{E} = \frac{\frac{510}{1.15}}{2 \cdot 10^5} = 2.22\,‰$, calculamos x_{lim}

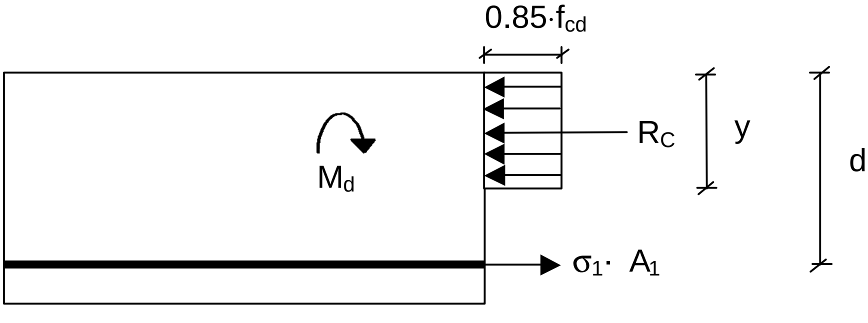
$$x_{lim} = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{c2}} \cdot d = \frac{3.5}{2.22 + 3.5} \cdot 407 = 249\text{ mm}$$

$$y_{lim} = 0.8 \cdot x_{lim} = 199.2\text{ mm}$$

$$M_{lim} = 0.85 \cdot \frac{35}{1.5} \cdot 300 \cdot 199.2 \cdot \left(407 - \frac{199.2}{2} \right) = 364.3\text{ m} \cdot \text{kN}$$

$$M_d = \gamma_f \cdot M = 1.6 \cdot 156.25 = 250\text{ m} \cdot \text{kN}$$

Al ser $M_d < M_{lim}$, comprobamos que no es necesaria la armadura de compresión.



Para calcular la armadura, aplicamos las ecuaciones de la Estática:

$$\sum M_{A1} = 0$$

$$M_d - 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot y \cdot \left(d - \frac{y}{2} \right) = 0$$

$$250 \cdot 10^6 - 0.85 \cdot \frac{35}{1.5} \cdot 300 \cdot y \cdot \left(407 - \frac{y}{2} \right) = 0$$

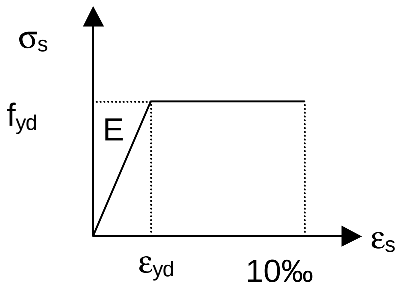
$$250 \cdot 10^6 - 5950 \cdot y \cdot \left(407 - \frac{y}{2} \right) = 0$$

$$250 \cdot 10^6 - 2421650 \cdot y + 2975 \cdot y^2 = 0 \quad \left. \right\} \begin{array}{l} y_1 = 121.3\,\text{mm} \\ y_2 = 692.7\,\text{mm} \end{array}$$

Por tanto, $y = 121.3\,\text{mm}$

$$\sum F_N = 0$$

$$\sigma_1 \cdot A_1 = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot y$$



$$\sigma_1 \cdot A_1 = 0.85 \cdot \frac{35}{1.5} \cdot 300 \cdot 121.3 = 721.735\,\text{N}$$

$$x = \frac{y}{0.8} = \frac{121.3}{0.8} = 151.6\,\text{mm}$$

$$0.259 \cdot d = 105.4\,\text{mm}$$

Por tanto, $0.259 \cdot d < x < x_{lim}$, por lo que la sección se encuentra en el dominio 3. En este dominio, $\sigma_1 = f_{yd}$, de modo que:

$$A_1 = \frac{721735}{\frac{510}{1.15}} = 1627.4\ mm^2$$

Si elegimos barras de diámetro 20, obtendremos:

$$\frac{1627.4}{\pi \cdot \frac{20^2}{4}} = 5.2 \rightarrow 6\,\phi 20$$

Comprobamos que caben en la sección:

$$6\phi 20: \qquad 25 + 8 + 6 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 8 + 25 = 286\ mm < b$$

Cuantía mecánica mínima:

$$A_S \geq 0.04 \cdot A_c \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}}$$

$$A_S = 6 \cdot \pi \cdot \frac{20^2}{4} = 1885\ mm^2$$

$$A_C = 450 \cdot 300 = 135000\ mm^2$$

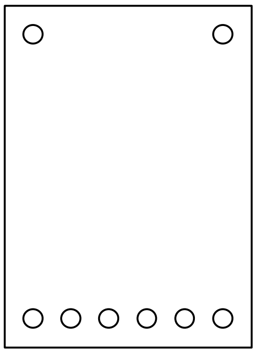
$$0.04 \cdot 135000 \cdot \frac{35/1.5}{510/1.15} = 284.1\ mm^2$$

Cuantía geométrica mínima:

Según la EHE, para vigas y acero B 500S es 2.8‰

$$A_{1CGM} = 2.8 \cdot \frac{450 \cdot 300}{1000} = 378\ mm^2$$

$$A_{2CGm} = 30\% \cdot A_{1CGM} = 113.4\ mm^2$$



Por tanto, adoptamos:

$A_1 = 6\phi20$
$A_2 = 2\phi16$

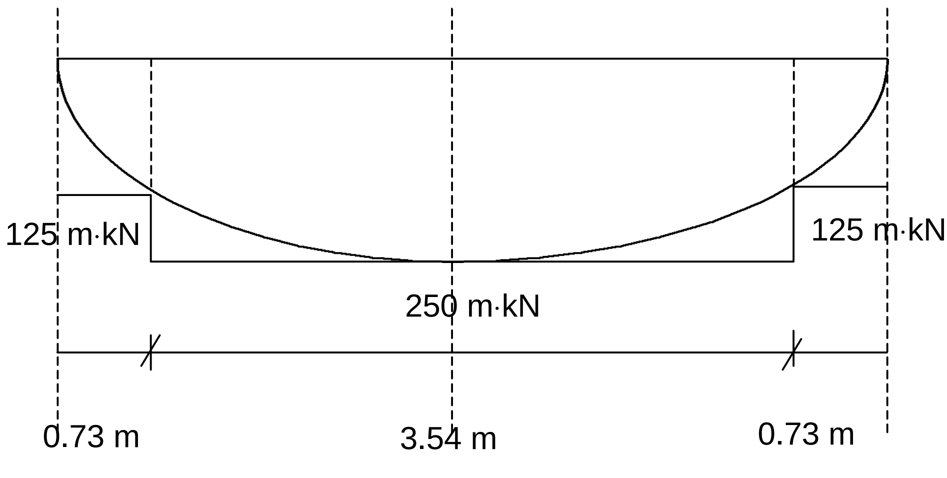
Vamos, antes de seguir con los esquemas de armado, a determinar los puntos de momento mitad:

$$M_{máx} = 156.25\,m \cdot kN$$

$$\frac{M_{máx}}{2} = 78.125 = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$78.125 = 125 \cdot x - 25 \cdot x^2$$

$$25 \cdot x^2 - 125 \cdot x + 78.125 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0.73\,m \\ x_2 = 4.27\,m \end{cases}$$



Longitudes de anclaje

Cara superior:

$$l_{bII} = 1.4 \cdot m \cdot \phi^2 \not< \frac{f_{yk}}{14} \cdot \phi$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{ck} = 35 \\ B\,500S \end{array}\right\} m = 12$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.4 \cdot 12 \cdot 1.6^2 = 43\,\text{cm} \\ \frac{510}{14} \cdot 1.6 = 58.3\,\text{cm} \end{array}\right\} l_{bII,\phi 16} = 58.3\,\text{cm}$$

$$l_{bneta} = l_b \cdot \beta \cdot \frac{A_s}{A_{s,real}}$$

$$\beta = 1$$

$$\frac{A_s}{A_{s,real}} = \frac{113.4}{402.1} = 0.28$$

$$2\phi 16 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{16^2}{4} = 402.1$$

$$l_{bneta} = 58.3 \cdot 0.28 = 16.3\,\text{cm} \to 20\,\text{cm}$$

Cara inferior

En este caso, las barras de la cara inferior se encuentran en Posición I, y la longitud de anclaje será:

$$l_{bI} = m \cdot \phi^2 \not< \frac{f_{yk}}{20} \phi$$

$$\left.\begin{array}{l} 12 \cdot 2^2 = 48\ \text{cm} \\ \dfrac{510}{20} \cdot 2 = 51\text{cm} \end{array}\right\} l_{bl,\phi 20} = 51\text{cm}$$

$$l_{bneta} = l_b \cdot \beta \cdot \frac{A_s}{A_{s,real}} = 51 \cdot 1 \cdot \frac{1627.4}{1885.0} = 44\ \text{cm}$$

Como no hemos tenido en cuenta el decalaje de los momentos máximos, adoptamos como distancia de seguridad S_d la expresión simplificada:

$$S_d = 0.85 \cdot d = 0.85 \cdot 407 = 346\ \text{mm}$$

Por tanto, en la cara superior dispondremos 2ϕ16 de principio a fin, doblando hacia abajo en los extremos una distancia de 20 cm.

En la cara inferior, las tres barras que forman la armadura en los extremos se anclarán una distancia 44+34.6 = 78.6 cm, por lo que se adopta una longitud de anclaje de 80 cm. Obviamente esta longitud exige que la barra se doble hacia arriba y, al llegar a la cara superior, doblarse de nuevo hacia el interior del vano.

También en la cara inferior, las barras del tramo central que *se cortan* a 73 cm de los apoyos, se prolongarán de lado a lado y se levantarán 10 cm en los apoyos.

Comprobación a esfuerzo cortante

$$V = 125\ \text{kN}$$
$$V_d = \gamma_f \cdot V = 1.6 \cdot 125 = 200\ \text{kN}$$

$$V_{u1} = 0.30 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$$
$$V_{u1} = 0.30 \cdot \frac{35}{1.5} \cdot 300 \cdot 407 = 854.7\ \text{kN}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{5}V_{u1} = \frac{1}{5}\cdot 854.7 = 170.9\,\text{kN} \\ \frac{2}{3}V_{u1} = \frac{2}{3}\cdot 854.7 = 569.8\,\text{kN}\end{array}\right\} \quad \frac{1}{5}V_{u1} < V_d < \frac{2}{3}V_{u1}$$

$$0.60\cdot d = 0.6\cdot 407 = 244.2\,\text{mm}$$

$$S_t \leq 15\cdot\phi_{min} = 15\cdot 16 = 240\,\text{mm}$$

$$\phi > \frac{1}{4}\phi_{máx} = 4\,\text{mm}$$

Teniendo en cuenta estos condicionantes, hemos adoptado cercos de $\phi 8$ separados 240 mm.

$$V_{u2} = V_{cu} + V_{su}$$

$$V_{cu} = 0.10\cdot\xi\cdot(100\cdot\rho_1\cdot f_{ck})^{1/3}\cdot b\cdot d$$

$$\xi = 1+\sqrt{\frac{200}{d}} = 1+\sqrt{\frac{200}{407}} = 1.70$$

$$\rho_1 = \frac{A_s}{b\cdot d} \not> 0'02$$

Al anclar la armadura de tracción se comprueba que en toda la sección va a haber $6\phi 20$, por lo que se obtiene:

$$A_s = 6\cdot\frac{\pi\cdot 20^2}{4} = 1885\,\text{mm}^2$$

$$\rho_1 = \frac{1885}{300\cdot 407} = 1.54\cdot 10^{-2}$$

$$V_{cu} = 0.10\cdot 1.70\cdot(100\cdot 1.54\cdot 10^{-2}\cdot 35)^{1/3}\cdot 300\cdot 407 = 78408\,\text{N}$$

Para comprobar si la separación entre cercos cumple todas las limitaciones de la EHE, vamos a ver la condición impuesta de la fisuración por esfuerzo cortante.

Fisuración por esfuerzo cortante:

$$\frac{V_d - 3 \cdot V_{cu}}{A_\alpha \cdot d} \cdot \text{sen}\alpha$$

$$V_d - 3 \cdot V_{cu} = 200 - 3 \cdot 78.4 = -35.2 \text{ kN}$$

Por lo tanto, la limitación de $S_t \leq 300$ mm se cumple.

$$V_{su} = A_{90} \cdot f_{y90,\alpha} \cdot 0.90 \cdot d$$

$$A_{90} = \frac{2 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4}}{240} = 0.42$$

$$V_{su} = 0.42 \cdot \frac{510}{1.15} \cdot 0.90 \cdot 407 = 68227 \text{ N}$$

$$V_{u2} = V_{cu} + V_{su} = 78408 + 68227 = 146635 \text{ N}$$

$V_{u2} < V_d$ por lo que no es admisible.

Si decidimos mantener como armadura transversal 2ϕ8, vamos a comprobar la separación que nos exige este esfuerzo cortante.

$$V_d - V_{cu} = 200000 - 78408 = 121592 \text{ N}$$

$$121592 = A_{90} \cdot \frac{510}{1.15} \cdot 0.90 \cdot 407$$

$$A_{90} = 0.75 = \frac{2 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4}}{S}$$

S = 134 mm.

Por tanto, adoptamos una separación entre cercos de 130 mm en la zona más solicitada a cortante, es decir, en las proximidades de los apoyos.

A una distancia de 1.25 m de los apoyos, el esfuerzo cortante vale la mitad, V_d =100 kN. Una separación de 240 mm permite absorber con seguridad estos esfuerzos. Esta separación se mantiene en los 2.5 m centrales de la viga.

Comprobación a fisuración

$$W_k \leq W_{máx}$$

Al der hormigón prefabricado, la anchura máxima de fisura vale: $W_{máx} = 0.2\text{mm}$

La anchura característica de fisura viene dada por la expresión:

$$W_k = \beta \cdot s_m \cdot \varepsilon_{sm}$$

$$\beta = 1.7$$

$$s_m = 2 \cdot c + 0.2 \cdot s + 0.4 \cdot k_1 \cdot \frac{\phi \cdot A_{c,eficaz}}{A_s}$$

s es la distancia entre ejes de la armadura longitudinal en la sección de estudio. En este caso, la sección más desfavorable corresponde al vano central, donde la armadura traccionada es 6ϕ20.

$$300 - 2 \cdot 25 - 2 \cdot 8 - 2 \cdot 20 = 194\ \text{mm}$$

$$194 - 4 \cdot 20 = 114 \text{ mm}$$

$$\frac{114}{5} = 22.8 \text{ mm}$$

$$s = 22.8 + 20 = 42.8 < 15 \cdot \phi$$

$$k_1 = 0.125$$

$$7.5 \cdot \phi = 7.5 \cdot 20 = 150$$

$$A_{c,eficaz} = b \cdot (7.5 \cdot \phi + c) = 300 \cdot (150 + 25) = 52500 \text{ mm}^2$$

$$s_m = 2 \cdot 25 + 0.2 \cdot 42.8 + 0.4 \cdot 0.125 \cdot \frac{20 \cdot 52500}{6 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4}} = 86.4 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left[1 - k_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2\right] \not< 0.4 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$\sigma_s = \frac{M}{0.8 \cdot d \cdot A_s} = \frac{156.25 \cdot 10^6}{0.8 \cdot 407 \cdot 6 \cdot \pi \cdot \frac{20^2}{4}} = 254.6 \text{ N/mm}^2$$

$$E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{\sigma_s}{E_s} = 1.27 \cdot 10^{-4}$$

$$k_2 = 0.5$$

$$f_{ctm} = 0.30 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 3.210$$

$$\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} = \frac{f_{ctm} \cdot b \cdot h^2}{M} = \frac{3.210 \cdot 300 \cdot 450^2}{156.25 \cdot 10^6} = 1.248$$

$$\varepsilon_{sm} = 1.27 \cdot 10^{-4} \cdot \left[1 - 0.5 \cdot 1.248^2\right] = 2.81 \cdot 10^{-5} < 0.4 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$0.4 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} = 5.1 \cdot 10^{-5}$$

$$W_K = 1.7 \cdot 86.4 \cdot 5.1 \cdot 10^{-5} = 0.0075 < 0.2\,\text{mm}$$

Admisible a fisuración.

Flecha

Debemos establecer cuanto vale la relación L/d que exime calcular la flecha. Para ello, en primer lugar, debemos determinar si nos encontramos ante un elemento débil o fuertemente armado, teniendo en cuanta que el límite de la cuantía geométrica es del 1.2‰

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} = \frac{6 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4}}{300 \cdot 407} = 1.54\,\%$$

Por lo tanto es un elemento fuertemente armado. Como nos encontramos que es una viga biapoyada, la relación entre la luz y el canto útil L/d ha de ser menor o igual que 14.

$$\frac{L}{d} = \frac{5000}{407} = 12.29$$

Como es menor que 14, no es necesario realizar la comprobación a flecha.