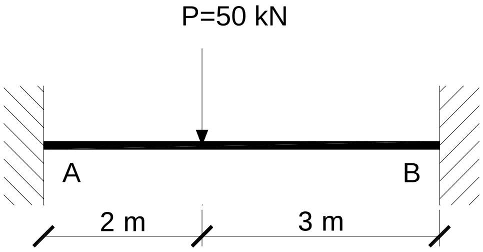
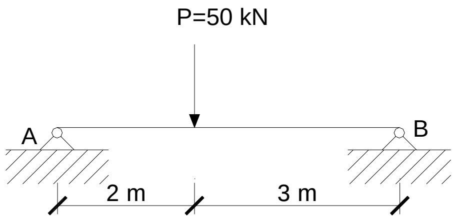
Calcular las reacciones y momentos de empotramiento de la viga de la figura, empleando el método de superposición. Así mismo, obtener la deformación en el punto de aplicación de la carga aplicando los teoremas de Mohr.

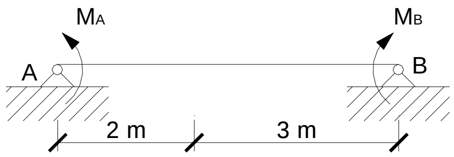


El sistema de la figura se puede descomponer en:

[1]



[2]



Con las restricciones:

$$\theta_{A1} + \theta_{A2} = 0$$
$$\theta_{B1} + \theta_{B2} = 0$$

- En la viga biapoyada con carga puntual descentrada se obtiene:

$$\theta_{A1} = \frac{P \cdot a \cdot b \cdot (l + b)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l}$$

$$\theta_{B1} = \frac{-P \cdot a \cdot b \cdot (l + a)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l}$$

- y en la viga biapoyada con momentos negativos en los apoyos:

$$\theta_{A2} = \frac{-M_A \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{M_B \cdot l}{6 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta_{B2} = \frac{M_B \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{M_A \cdot l}{6 \cdot E \cdot I}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones definido es:

$$\theta_{A1} + \theta_{A2} = 0$$

$$\frac{P \cdot a \cdot b \cdot (l+b)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} - \frac{M_A \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{M_B \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} = 0 \qquad [1]$$

$$\theta_{A1} + \theta_{A2} = 0$$

$$-\frac{P \cdot a \cdot b \cdot (l+a)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} + \frac{M_B \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{M_A \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} = 0 \qquad [2]$$

Dividiendo [1] entre 2 y sumando el resultado a [2] se obtiene:

$$\frac{P \cdot a \cdot b \cdot (l+b)}{12 \cdot E \cdot I \cdot l} - \frac{M_B \cdot l}{12 \cdot E \cdot I} - \frac{P \cdot a \cdot b \cdot (l+a)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} + \frac{M_B \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} = 0$$

$$P \cdot a \cdot b \cdot (l+b) - M_B \cdot l^2 - 2 \cdot P \cdot a \cdot b \cdot (l+a) + 4 \cdot M_B \cdot l^2 = 0$$

$$3 \cdot M_B \cdot l^2 = 2 \cdot P \cdot a \cdot b \cdot (l+a) - P \cdot a \cdot b \cdot (l+b) = P \cdot a \cdot b \cdot (l + 2 \cdot a - b)$$

como $l - b = a$, se tiene que:

$$3 \cdot M_B \cdot l^2 = 3 \cdot P \cdot a^2 \cdot b$$

Por tanto,

$$M_B = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2}$$

Introduciendo el valor de M_B en [1], se obtiene:

$$\frac{P \cdot a \cdot b \cdot (l+b)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} - \frac{M_A \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} = 0$$

$$P \cdot a \cdot b \cdot (l + b) - P \cdot a^2 \cdot b = 2 \cdot M_A \cdot l^2$$

$$2 \cdot M_A \cdot l^2 = P \cdot a \cdot b \cdot (l + b - a)$$

como $l - a = b$, se tiene que:

$$2 \cdot M_A \cdot l^2 = 2 \cdot P \cdot a \cdot b^2$$

Por tanto,

$$M_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2}$$

Para calcular las reacciones:

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot l + M_A - M_B - P \cdot a = 0$$

$$R_B \cdot l + \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} - \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2} - P \cdot a = 0$$

$$R_B = \frac{P \cdot a}{l} \cdot \left(\frac{l^2 + a \cdot b - b^2}{l^2} \right)$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \cdot l - M_A + M_B - P \cdot b = 0$$

$$R_A \cdot l - \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} + \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2} - P \cdot b = 0$$

$$R_A = \frac{P \cdot b}{l} \cdot \left(\frac{l^2 + a \cdot b - a^2}{l^2} \right)$$

Numéricamente,

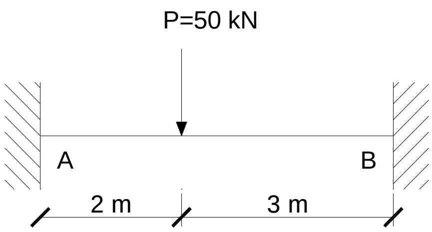
$$R_A = \frac{P \cdot b}{l} \cdot \left(\frac{l^2 + a \cdot b - a^2}{l^2} \right) = \frac{50 \cdot 3}{5} \cdot \left(\frac{5^2 + 2 \cdot 3 - 2^2}{5^2} \right) = 32.4 \text{ kN}$$

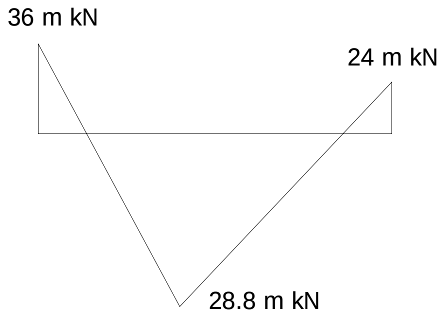
$$R_B = \frac{P \cdot a}{l} \cdot \left(\frac{l^2 + a \cdot b - b^2}{l^2} \right) = \frac{50 \cdot 2}{5} \cdot \left(\frac{5^2 + 2 \cdot 3 - 3^2}{5^2} \right) = 17.6 \text{ kN}$$

$$M_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} = \frac{50 \cdot 2 \cdot 3^2}{5^2} = 36 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

$$M_B = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2} = \frac{50 \cdot 2^2 \cdot 3}{5^2} = 24 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Para calcular la deformación en el punto de aplicación de la carga mediante los teoremas de Mohr, es necesario recurrir al diagrama de momentos flectores.





La expresión de la curva de momentos flectores, entre A y A_1 (punto de aplicación de la carga), viene definida por:

$$\frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{M + 36}{28.8 + 36}; \rightarrow M = 32.4 \cdot x - 36$$

La sección de momento nulo se encuentra en el punto de abcisa:

$$32.4 \cdot x - 36 = 0; \rightarrow x = \frac{36}{32.4} = 1.11 \text{ m}$$

De este modo, la deformación del punto de aplicación A_1 de la carga puntual **respecto a la tangente trazada por A**, queda definida por:

$$\delta_{AA_1} = -\int_0^{1.11} \frac{M \cdot x \cdot dx}{E \cdot I} + \int_{1.11}^{2} \frac{M \cdot x \cdot dx}{E \cdot I}$$

Introduciendo la expresión de M:

$$\delta_{AA_1} = -\int_0^{1.11} \frac{\left(32.4 \cdot x^2 - 36 \cdot x\right) \cdot dx}{E \cdot I} + \int_{1.11}^{2} \frac{\left(32.4 \cdot x^2 - 36 \cdot x\right) \cdot dx}{E \cdot I}$$

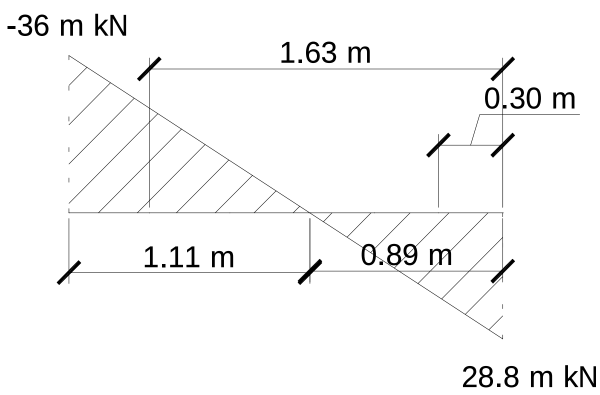
$$\delta_{AA_1} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-\left[\frac{32.4}{3} \cdot x^3 - \frac{36}{2} \cdot x^2\right]_0^{1.11} + \left[\frac{32.4}{3} \cdot x^3 - \frac{36}{2} \cdot x^2\right]_{1.11}^{2} \right)$$

$$\delta_{AA_1} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-\left[10.8 \cdot 1.11^3 - 18 \cdot 1.11^2\right] + \left[10.8 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2^2\right] - \left[10.8 \cdot 1.11^3 - 18 \cdot 1.11^2\right]\right)$$

$$\delta_{AA_1} = \frac{29.21}{E \cdot I} \text{ m}$$

E en kN/m^2 e I en m^{-4}.

Si se calculase de forma gráfica (momentos estáticos respecto A_1), el resultado sería:



$$\delta_{AA_1} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left| -\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 1.11 \cdot 1.63 + \frac{1}{2} \cdot 28.8 \cdot 0.89 \cdot 0.30 \right| = \frac{28.77}{E \cdot I} \text{ m}$$