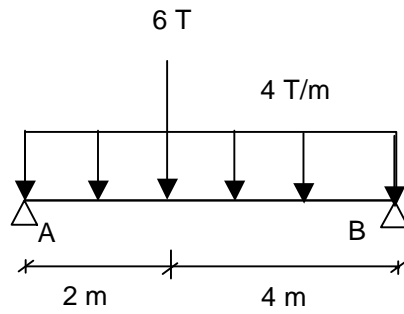
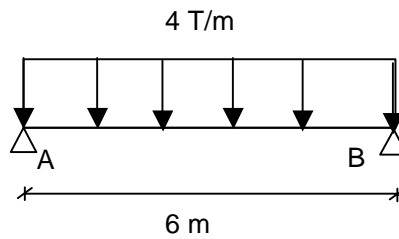


Calcular el esfuerzo cortante máximo, el momento flector máximo y la máxima deformación del siguiente supuesto, dejando este último valor en función de  $EI$ .



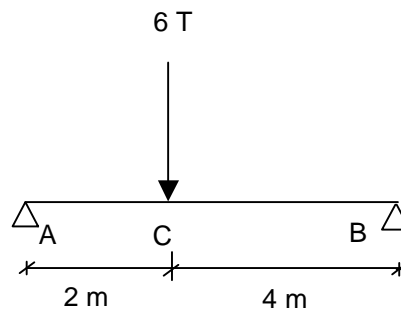
Para resolver el problema utilizaremos la superposición de los siguientes casos simples:

[1]



+

[2]



De la situación [1] obtenemos en el Prontuario las expresiones que determinan el momento flector, el esfuerzo cortante y la ecuación de la elástica:

$$M = \frac{q \cdot x}{2} \cdot (l - x) = \frac{4 \cdot x}{2} \cdot (6 - x) = 12 \cdot x - 2 \cdot x^2$$

$$Q = q \cdot \left( \frac{l}{2} - x \right) = 4 \cdot \left( \frac{6}{2} - x \right) = 12 - 4 \cdot x$$

$$y_x = \frac{q \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (x^3 - 2 \cdot l \cdot x^2 + l^3) = \frac{4 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (x^3 - 2 \cdot 6 \cdot x^2 + 6^3)$$

$$y_x = \frac{x}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (x^3 - 12 \cdot x^2 + 216)$$

Del mismo modo, en el Prontuario obtenemos las expresiones del momento flector, esfuerzo cortante y deformada del supuesto [2]:

$$M_{AC} = \frac{P \cdot b}{l} \cdot x = \frac{6 \cdot 4}{6} \cdot x = 4 \cdot x$$

$$M_{CB} = \frac{P \cdot a}{l} \cdot (l - x) = \frac{6 \cdot 2}{6} \cdot (6 - x) = 12 - 2 \cdot x$$

$$Q_{AC} = \frac{P \cdot b}{l} = \frac{6 \cdot 4}{6} = 4T$$

$$Q_{CB} = -\frac{P \cdot a}{l} = -\frac{6 \cdot 2}{6} = -2T$$

$$y_{AC} = \frac{P \cdot l \cdot b \cdot x}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left( 1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) = \frac{6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot x}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left( 1 - \frac{4^2}{6^2} - \frac{x^2}{6^2} \right) = \frac{2 \cdot x}{3 \cdot E \cdot I} \cdot (20 - x^2)$$

$$y_{CB} = \frac{P \cdot l \cdot a \cdot (l - x)}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[ 1 - \frac{a^2}{l^2} - \left( \frac{l - x}{l} \right)^2 \right] = \frac{6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot (6 - x)}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[ 1 - \frac{2^2}{6^2} - \left( \frac{6 - x}{6} \right)^2 \right]$$

$$y_{CB} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot (6-x)}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[ \frac{6^2 - 2^2 - (6-x)^2}{6^2} \right] = \frac{(6-x)}{3 \cdot E \cdot I} \cdot [-4 - x^2 + 12 \cdot x]$$

### ✘ Obtención del momento flector máximo

Sumamos las expresiones obtenidas en ambos casos, teniendo en cuenta la existencia de dos tramos, uno desde el apoyo dorsal hasta el punto de aplicación de la carga puntual (tramo AC) y otro desde este punto hasta el apoyo frontal (tramo CB).

$$M_{AC} = M_{[1]} + M_{[2]AC} = 12 \cdot x - 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x = 16 \cdot x - 2 \cdot x^2$$

$$M_{CB} = M_{[1]} + M_{[2]CB} = 12 \cdot x - 2 \cdot x^2 + 12 - 2 \cdot x = 12 + 10 \cdot x - 2 \cdot x^2$$

Para determinar el máximo momento flector, derivamos ambas expresiones e igualamos a cero:

$$M'_{AC} = 16 - 4 \cdot x = 0 \rightarrow x = 4$$

$$M'_{CB} = 10 - 4 \cdot x = 0 \rightarrow x = 2.5$$

El primer valor obtenido no tiene significado físico, pues el punto de abscisa  $x=4$  no pertenece al intervalo AC. Por consiguiente, el máximo momento flector se da en la sección de la viga distante 2.5 m del apoyo dorsal.

El valor de este momento máximo es:

$$M_{x=2.5} = 12 + 10 \cdot 2.5 - 2 \cdot 2.5^2 = 24.5 \text{ m} \cdot \text{T}$$

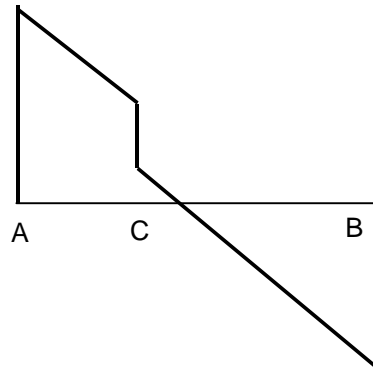
### ✘ Obtención del esfuerzo cortante máximo

Operamos de igual modo:

$$Q_{AC} = Q_{[1]} + Q_{[2]AC} = 12 - 4 \cdot x + 4 = 16 - 4 \cdot x$$

$$Q_{CB} = Q_{[1]} + Q_{[2]CB} = 12 - 4 \cdot x - 2 = 10 - 4 \cdot x$$

Se puede comprobar que ambas expresiones son dos rectas. Para estudiar donde se encuentra el esfuerzo cortante máximo, analizaremos las secciones donde existen cargas concentradas (apoyos y punto C).



$$Q_A = Q_{x=0} = 16 - 4 \cdot 0 = 16T$$

$$Q_B = Q_{x=6} = 10 - 4 \cdot 6 = -14T$$

$$Q_C = Q_{ACx=2} + Q_{CBx=2} = (16 - 4 \cdot 2) - (10 - 4 \cdot 2) = 6T$$

Por tanto, el esfuerzo cortante máximo se da en el apoyo A.

### ✘ Obtención de la flecha

Para obtener la deformación máxima es preciso estudiar previamente la deformada, que habrá que analizarla por tramos:

$$y_{AC} = y_{[1]} + y_{[2]AC} = \frac{x}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (x^3 - 12 \cdot x^2 + 216) + \frac{4 \cdot x}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (20 - x^2)$$

$$y_{AC} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot [x \cdot (x^3 - 12 \cdot x^2 + 216) + 4 \cdot x \cdot (20 - x^2)] = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (x^4 - 16 \cdot x^3 + 296 \cdot x)$$

$$y_{CB} = y_{[1]} + y_{[2]CB} = \frac{x}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (x^3 - 12 \cdot x^2 + 216) + \frac{(6-x)}{3 \cdot E \cdot I} \cdot (-4 + 12 \cdot x - x^2)$$

$$y_{CB} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot [x \cdot (x^3 - 12 \cdot x^2 + 216) + (12 - 2 \cdot x) \cdot (-4 + 12 \cdot x - x^2)]$$

$$y_{CB} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot [x^4 - 10 \cdot x^3 - 36 \cdot x^2 + 368 \cdot x - 48]$$

Una vez obtenida la deformada, estudiamos la flecha:

$$y'_{AC} = 0 \rightarrow \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (4 \cdot x^3 - 48 \cdot x^2 + 296) = 0$$

Las raíces de este polinomio son:  $x=-2.28$ ,  $x=2.84$  y  $x=11.43$ . Todos estos valores no tienen significado físico, pues no pertenecen al intervalo AC.

$$y'_{CB} = 0 \rightarrow \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (4 \cdot x^3 - 30 \cdot x^2 - 72 \cdot x + 368) = 0$$

Las raíces de este polinomio son:  $x=2.93$ ,  $x=-3.77$  y  $x=8.34$ . Por tanto, la deformación máxima se produce en la sección distante del apoyo A 2.93 m.

$$y_{x=2.93} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (2.93^4 - 10 \cdot 2.93^3 - 36 \cdot 2.93^2 + 368 \cdot 2.93 - 48) = \frac{90.56}{E \cdot I}$$

teniendo en cuenta que las unidades son T y m.