3.9. Desplazamientos, solicitaciones y reacciones.

3.9.1. Desplazamientos de los nudos.

Los desplazamientos de los nudos libres se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones [16], que constituye la ecuación matricial del pórtico:

$$\{P_a\}_G = [K] \cdot \{d_1\}_G$$

Aplicando cálculo matricial, de la expresión anterior se puede despejar el vector de los desplazamientos de los nudos libres.

$$\{d_1\}_G = [K]^{-1} \cdot \{P_a\}_G \qquad [17]$$

En consecuencia, la matriz de rigidez [K] del pórtico determina los desplazamientos de los nudos libres en coordenadas globales en función de las cargas aplicadas directamente sobre los nudos, referidas también a coordenadas globales.

3.9.2. Solicitaciones de extremo.

La ecuación [6]

$$\begin{Bmatrix} \{S_{12}\} \\ \{S_{21}\} \end{Bmatrix}_L = \begin{pmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{pmatrix}_L \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \end{Bmatrix}_L$$

relaciona las solicitaciones en los extremos de la barra 1-2 con los desplazamientos de sus extremos, $\{d_1\}_L$ y $\{d_2\}_L$ en coordenadas locales. Como en la expresión [17] los desplazamientos aparecen en coordenadas globales, se va a pasar, mediante [9], los vectores de desplazamiento de coordenadas locales a coordenadas globales.

Así, $\{d_1\}_L = [R]^T \cdot \{d_1\}_G$ y $\{d_2\}_L = [R]^T \cdot \{d_2\}_G$, por lo que la expresión anterior se puede escribir

$$\{S_{12}\}_L = [K_{11}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_1\}_G + [K_{12}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_2\}_G$$
$$\{S_{21}\}_L = [K_{21}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_1\}_G + [K_{22}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_2\}_G$$

Si, genéricamente, hacemos

$$[C_{ij}] = [K_{ij}]_L \cdot [R]^T \qquad [18]$$

Las expresiones anteriores se transforman en

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_L &= [C_{11}]\cdot\{d_1\}_G + [C_{12}]\cdot\{d_2\}_G \\ \{S_{21}\}_L &= [C_{21}]\cdot\{d_1\}_G + [C_{22}]\cdot\{d_2\}_G \end{aligned}$$

y de forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \{S_{12}\} \\ \{S_{21}\} \end{Bmatrix}_L = \begin{pmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] \\ [C_{21}] & [C_{22}] \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \end{Bmatrix}_G \qquad [19]$$

Los valores de la submatrices de conversión $[C_{ij}]$ son:

$$[C_{11}] = \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A}{L}\cdot\cos\alpha & -\frac{E\cdot A}{L}\cdot\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\operatorname{sen}\alpha & \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\cos\alpha & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\operatorname{sen}\alpha & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\cos\alpha & \frac{4\cdot E\cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

$$[C_{12}] = \begin{pmatrix} -\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{E\cdot A}{L}\cdot\cos\alpha & -\frac{E\cdot A}{L}\cdot\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\operatorname{sen}\alpha & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\cos\alpha & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\operatorname{sen}\alpha & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\cos\alpha & \frac{2\cdot E\cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

$$[C_{21}] = \begin{pmatrix} -\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{E\cdot A}{L}\cdot\cos\alpha & -\frac{E\cdot A}{L}\cdot\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\operatorname{sen}\alpha & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\cos\alpha & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\operatorname{sen}\alpha & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\cos\alpha & \frac{2\cdot E\cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

$$[C_{22}] = \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A}{L}\cdot\cos\alpha & \frac{E\cdot A}{L}\cdot\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\operatorname{sen}\alpha & \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\cos\alpha & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\operatorname{sen}\alpha & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\cos\alpha & \frac{4\cdot E\cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

Estas expresiones, sustituidas en [19] dan lugar a la ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \\ N_{21} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix}_L = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos\alpha & \frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen}\alpha & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos\alpha & -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen}\alpha & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos\alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen}\alpha & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos\alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen}\alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos\alpha & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen}\alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos\alpha & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ \hline -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos\alpha & -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen}\alpha & 0 & \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos\alpha & \frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen}\alpha & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos\alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen}\alpha & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos\alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen}\alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos\alpha & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen}\alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos\alpha & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{array} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_G$$

y en forma reducida

$$\{S\}_L = [C] \cdot \{d_1\}_G \qquad [20]$$

La matriz de conversión [C] determina las solicitaciones de extremo en coordenadas locales en función de los desplazamientos de los nudos referidos a coordenadas globales. Si quisiéramos calcular las solicitaciones de extremo en coordenadas locales en función de las cargas aplicadas sobre los nudos referidas a coordenadas globales,

$$\{S\}_L = [C] \cdot [K]^{-1} \cdot \{P_a\}_G$$

Definiendo la matriz de conversión [D] con $[D] = [C] \cdot [K]^{-1}$, la ecuación [20] se convierte en

$$\{S\}_L = [D] \cdot \{P_a\}_G$$

Las matrices de conversión [C] y [D] dependen únicamente de la forma, los enlaces y el material, y por ello son matrices características de la estructura.

3.9.3. Reacciones externas.

Recordando la ecuación matricial [15],

$$\begin{Bmatrix} \{P_a\} \\ \{R\} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [K] & [K_{II}] \\ [K_I] & [K_{III}] \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_G$$

de donde

$$\{R\}_G = [K_I] \cdot \{d_1\}_G \qquad [21]$$

De esta expresión se deduce que el vector de reacciones externas $\{R\}_G$ en coordenadas globales es función del vector de desplazamientos de los nudos libres, también en coordenadas globales.

La matriz de proporcionalidad $[K_I]$ viene definida por

$$[K_I] = \begin{pmatrix} [K_{12}]_G & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{54}]_G \end{pmatrix} \qquad [22]$$

Si en lugar de expresar las reacciones en función de los desplazamientos se desea hacerlo en función del vector de cargas aplicadas, basta recurrir a la ecuación [17], y con ello se puede escribir:

$$\{R\}_G = [K_I] \cdot [K]^{-1} \cdot \{P_a\}_G$$