Cálculo matricial de pórticos biempotrados a dos aguas

1. Hipótesis de cálculo.

Se verifica la ley de Hooke, lo que significa que en las estructuras los desplazamientos son proporcionales a las fuerzas aplicadas.

Los desplazamientos son pequeños en relación con las dimensiones de la estructura. En el proceso de carga de la estructura, ésta se deforma, pero al ser las deformaciones pequeñas comparadas con las dimensiones de la estructura, se desprecian los cambios que las cargas producen, considerándose que la estructura mantiene su forma y dimensiones primitivas.

Al verificarse la ley de Hooke y la hipótesis de pequeños desplazamientos, el principio de superposición es aplicable a estas estructuras y, en consecuencia, los efectos que en un sistema de cargas ejercen sobre una estructura es igual a la suma de los efectos que ejercen esas mismas cargas actuando por separado.

Se supone también el principio de unicidad de las soluciones, según el cual son únicos los desplazamientos y las solicitaciones originadas en una estructura por un determinado estado de cargas.

2. Desplazamientos y solicitaciones en una barra.

Consideremos una barra AB que pertenece a una estructura, y sean E y G sus módulos de elasticidad longitudinal y transversal. Supongamos que a esta barra AB se le provocan por separado los siguientes desplazamientos en sus extremos:

– Desplazamiento longitudinal del extremo A respecto al B.
– Desplazamiento transversal del extremo A respecto al B.
– Desplazamiento angular de flexión del extremo A.
– Desplazamiento angular de torsión del extremo A.

Para provocar cada uno de estos desplazamientos es necesario aplicar determinadas solicitaciones en las secciones extremas A y B, solicitaciones tanto mayores cuanto mayor sea la rigidez de la barra a ese desplazamiento.

A continuación se determinan las solicitaciones así definidas en una barra de longitud L y sección transversal constante. La generalización a una barra de sección variable supone una mayor complicación operativa pero no conceptual.

2.1. Desplazamiento longitudinal del extremo A respecto al B.

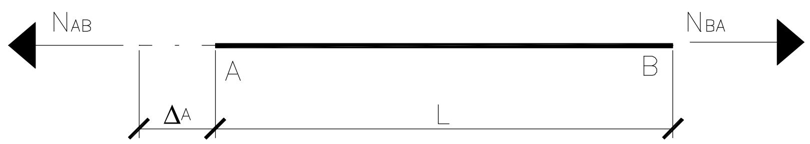

Figura 1. Desplazamiento longitudinal del extremo A respecto al B.

Sea A el área de la sección transversal de la barra AB (figura 1). Para que el extremo A de la barra experimente un desplazamiento longitudinal Δ_A respecto al extremo B es preciso que, en las secciones A y B, actúen las fuerzas normales N_{AB} y N_{BA}. Teniendo en cuenta que:

$$\Delta_A = \frac{N_{AB} \cdot L}{E \cdot A}$$

resulta que para provocar el desplazamiento longitudinal Δ_A es preciso aplicar en A y B las fuerzas normales:

$$N_{AB} = N_{BA} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \Delta_A \qquad [1]$$

2.2. Desplazamiento transversal del extremo A respecto al B.

Siendo I el momento de inercia I_z de la sección transversal de la barra AB (figura 2), supongamos ahora que el extremo A experimenta un desplazamiento transversal δ_A respecto al extremo B, y que además a ninguna de las dos secciones extremas se les permite girar. Ello exige aplicar en el extremo A las solicitaciones T_{AB}, M_{AB} y en el extremo B las solicitaciones T_{BA}, M_{BA}. De las ecuaciones de la Estática:

$$\sum M_B = 0 \qquad T_{AB} \cdot L - M_{AB} - M_{BA} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad\qquad T_{AB} - T_{BA} = 0$$

y por tanto $T_{AB} = T_{BA} = \dfrac{M_{AB} + M_{BA}}{L}$

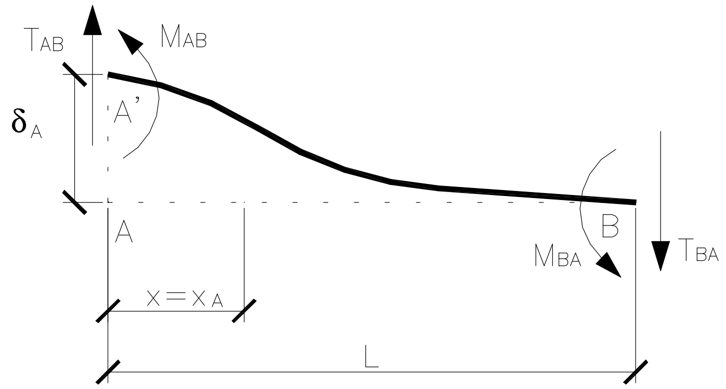

Figura 2. Desplazamiento transversal del extremo A respecto al B.

A una distancia x de la extremidad A, el momento flector es (figura 3):

$$M_z = -M_{AB} + T_{AB} \cdot x = -M_{AB} + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} \cdot x$$

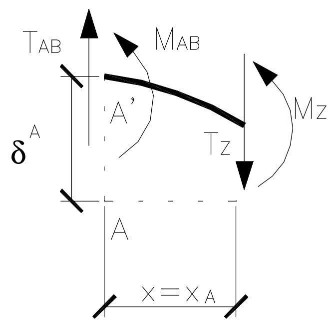

Figura 3. Momento flector en una sección x.

Aplicando el primer teorema de Mohr entre A y B obtenemos:

$$\theta_A - \theta_B = \int_{A,B} \frac{M_z \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^L \frac{\left(-M_{AB} + \dfrac{M_{AB} + M_{BA}}{L} \cdot x\right) \cdot dx}{E \cdot I} = 0$$

Suponiendo que la sección transversal es constante,

$$\left(-M_{AB} \cdot x\right]_0^L + \left(\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^L = 0$$

$$-M_{AB}\cdot L+\left(M_{AB}+M_{BA}\right)\cdot\frac{L}{2}=0$$
$$-M_{AB}\cdot\frac{L}{2}+M_{BA}\cdot\frac{L}{2}=0$$

Por tanto, $M_{AB}=M_{BA}$

Aplicando ahora el segundo teorema de Mohr entre A y B:

$$\delta_{A,B}=\int_{A,B}\frac{M_z\cdot x_A\cdot dx}{E\cdot I}=\int_0^L\frac{\left(-M_{AB}+\frac{2\cdot M_{AB}}{L}\cdot x\right)\cdot x\cdot dx}{E\cdot I}=\delta_A$$

$$\frac{1}{E\cdot I}\cdot\left(-M_{AB}\cdot\frac{L^2}{2}+2\cdot M_{AB}\cdot\frac{L^2}{3}\right)=\delta_A$$

$$\delta_A=\frac{M_{AB}\cdot L^2}{6\cdot E\cdot I}$$

y por tanto $M_{AB}=\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\delta_A$ y $T_{AB}=\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\delta_A$.

En resumen, para provocar el desplazamiento transversal δ_A es preciso aplicar en A y en B las solicitaciones:

$$T_{AB}=T_{BA}=\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3}\cdot\delta_A$$
$$M_{AB}=M_{BA}=\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\cdot\delta_A \qquad [2]$$

2.3. Desplazamiento angular de flexión del extremo A.

Para que la barra AB experimente únicamente el giro de flexión θ_A en su sección extrema A (figura 4) es necesario aplicar las solicitaciones M_{AB}, T_{AB} en el extremo A y las solicitaciones M_{BA}, T_{BA} en el extremo B. A una distancia x de la extremidad A, el momento flector es:

$$M_z=-M_{AB}+T_{AB}\cdot x$$

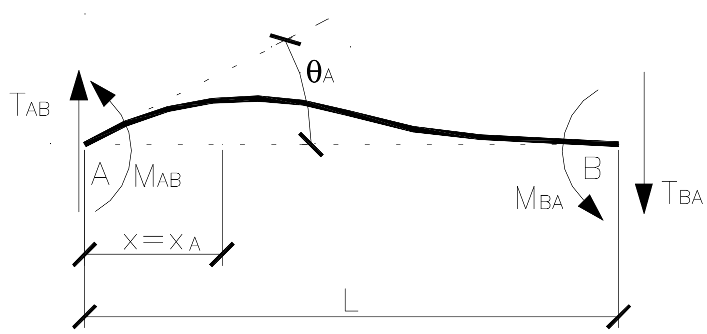

Figura 4. Desplazamiento angular de flexión en el extremo A.

Aplicando el segundo teorema de Mohr:

$$\delta_{A,B} = \int_{A,B} \frac{M_z \cdot x_A \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^L \frac{(-M_{AB} + T_{AB} \cdot x) \cdot x \cdot dx}{E \cdot I} = 0$$

$$\int_0^L -M_{AB} \cdot x \cdot dx + \int_0^L T_{AB} \cdot x^2 \cdot dx = 0$$

$$-M_{AB} \cdot \frac{L^2}{2} + T_{AB} \cdot \frac{L^3}{3} = 0$$

$$T_{AB} = \frac{3 \cdot M_{AB}}{2 \cdot L}$$

Aplicando el primer teorema de Mohr entre A y B:

$$\theta_{A,B} = -\theta_A = \int_{A,B} \frac{M_z \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^L \frac{(-M_{AB} + T_{AB} \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I}$$

$$-\theta_A = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-M_{AB} \cdot L + T_{AB} \cdot \frac{L^2}{2} \right)$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$M_{AB} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \theta_A$$

$$T_{AB} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \theta_A$$

De las ecuaciones de la Estática:

$$\sum M_B = 0 \qquad T_{AB} \cdot L - M_{AB} - M_{BA} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \theta_A$$

$$\sum F_y = 0 \qquad\qquad T_{AB} - T_{BA} = 0$$

$$T_{AB} = T_{BA} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \theta_A$$

En resumen, para provocar el giro θ_A es preciso aplicar en A y en B las solicitaciones:

$$\begin{aligned} T_{AB} = T_{BA} &= \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \theta_A \\ M_{AB} &= \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \theta_A \\ M_{BA} &= \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \theta_A \end{aligned} \qquad [3]$$

2.4. Desplazamiento angular de torsión del extremo A.

Finalmente, sea I_t el momento de inercia equivalente de torsión de la sección transversal de la barra AB (figura 5).

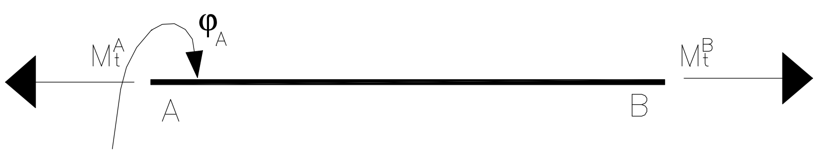

Figura 5. Desplazamiento angular de torsión del extremo A.

Para que el extremo A experimente un giro de torsión φ_A respecto al extremo B es preciso que en las secciones A y B actúen momentos torsores iguales y opuestos M_t^A y M_t^B. Teniendo en cuenta que:

$$\varphi_A = \frac{M_t^A \cdot L}{G \cdot I_t}$$

resulta que para provocar el giro de torsión φ_A es preciso aplicar en A y en B los momentos torsores

$$M_t^A = M_t^B = \frac{G \cdot I_t}{L} \cdot \varphi_A$$