



**UNIVERSIDAD DE  
CASTILLA - LA MANCHA**

**E.T.S.I. AGRONOMOS DE ALBACETE**

DPTO. PRODUCCION VEGETAL Y TECNOLOGIA AGRARIA

# **E.L.U. INESTABILIDAD. PANDEO**

**PABLO GALLETERO MONTERO**

**JESUS MONTERO MARTINEZ**

## **CURSO DE CALCULO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO**

Albacete, del 4 al 8 de octubre de 1999



# 1. INTRODUCCION

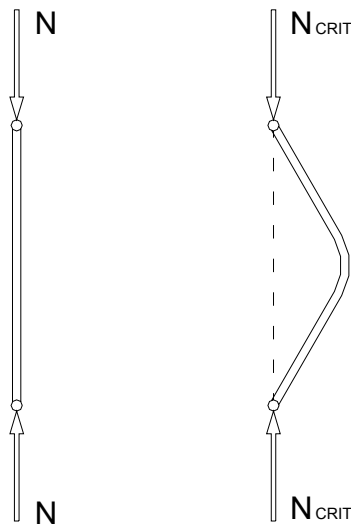


Fig.1 Pieza colapsando por pandeo

La inestabilidad es un estado límite último que puede llegar a producirse en todas aquellas barras que se encuentran solicitadas por esfuerzos axiales de compresión. En una barra determinada, cuando el esfuerzo axial de compresión supera un determinado valor denominado carga crítica se produce un fenómeno de inestabilidad denominado pandeo que produce el colapso irreversible de la pieza (fig.1)

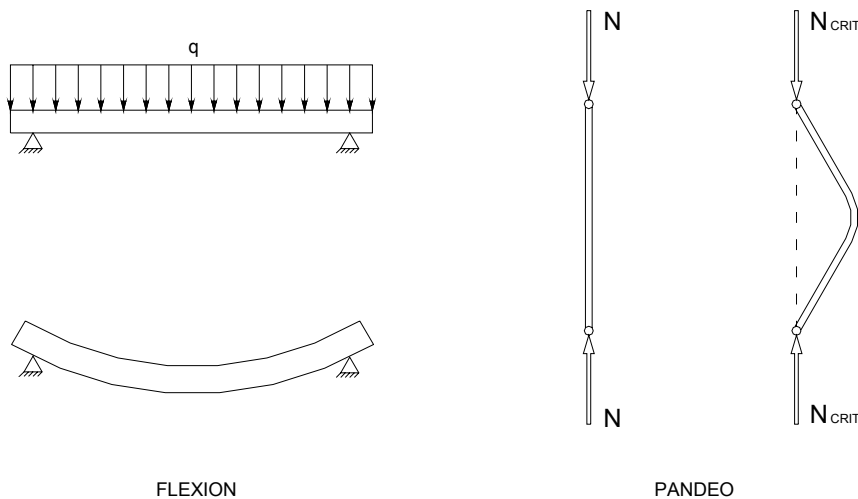


Fig. 2 Comparación flexión – pandeo

Es preciso señalar en este momento, para evitar cualquier confusión, las diferencias existentes entre el concepto de flexión de una barra y el de pandeo (fig.2) Ambos fenómenos se visualizan mediante la curvatura o cambio de curvatura de la barra por lo cual parecen a priori cuestiones similares. No obstante, existen entre ellos dos grandes diferencias. La primera de ellas es que la flexión se produce en la barra desde del primer instante de carga (lógicamente en mayor magnitud cuanto

mayor sea la carga) mientras que el pandeo se produce solamente si se supera el límite de la carga crítica. La segunda es que la curvatura por flexión es estable no implica necesariamente el colapso de la estructura y solamente hay que limitar su magnitud, mientras que el pandeo es inestable y produce irremediamente el colapso o rotura de la estructuras.

El fenómeno del pandeo está muy relacionado con la esbeltez de la barra, concepto que se desarrollará con más detenimiento en el próximo apartado pero que se asocia intuitivamente con la relación entre la longitud y la sección de la barra considerándose piezas muy esbeltas a aquellas que son largas y delgadas. En este sentido (fig.3), las piezas muy esbeltas tienen una gran tendencia al pandeo y alcanzan muy pronto su carga crítica, mientras que las poco esbeltas tienen muy poca tendencia a ello, e incluso por debajo de un cierto límite de esbeltez no presentan ningún problema de pandeo.

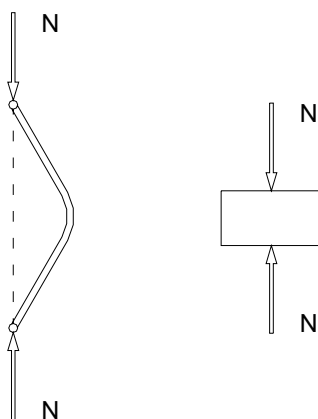


Fig.3. Influencia de la esbeltez en el pandeo

El cálculo de la carga crítica de pandeo para las barras de un entramado resulta en la práctica extremadamente complejo. Por ello, y así lo plantea a EHE, la comprobación del e.l.u.de inestabilidad se dirige en una doble vertiente:

- Por un lado, calcular y limitar la esbeltez de la barra para reducir su tendencia al pandeo.
- Por otro, evaluar de algún modo la magnitud de los efectos de segundo orden para evitar que en algún momento pueda verse superada la capacidad resistente de la barra.

Hay que señalar por último, que el cálculo de la esbeltez no es solamente un paso intermedio para analizar la influencia de los efectos de segundo orden sobre el cálculo de la armadura longitudinal de la barra. La limitación de esbeltez constituye una limitación en sí misma y en caso de no cumplir es preciso aumentar la sección de la misma o mejorar sus condiciones de vinculación.

## 2. ESBELTEZ MECANICA DE UNA BARRA

Dada una barra con una sección de ejes principales x-x y-y (fig.4) se define la esbeltez mecánica  $\lambda$  de la misma según sus dos ejes principales como:

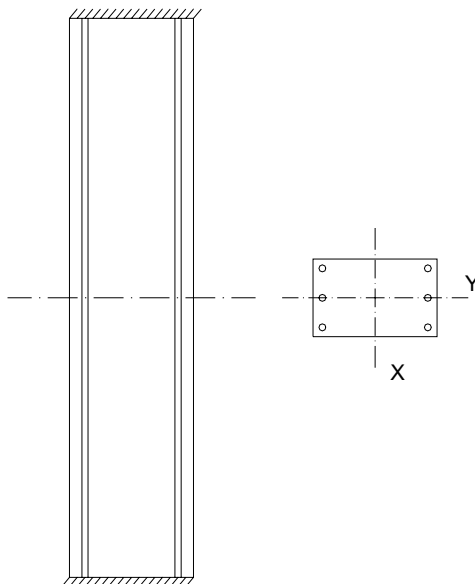


Fig.4. Concepto de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{\alpha_x \cdot l_x}{i_x} \quad \Rightarrow \quad \lambda_x = \frac{\alpha_x \cdot l_x}{i_x}$$

- siendo:
- $\lambda$  : La esbeltez en el eje considerado
  - $\alpha$ : El coeficiente de esbeltez que depende de las vinculaciones de la barra
  - $l$ : longitud real del tramo de pandeo considerado en la dirección considerada
  - $i$ : radio de giro del eje considerado

En la introducción del tema se hacía referencia a la esbeltez coloquialmente como relación existente entre la longitud y la sección de una pieza identificándose una pieza esbelta por ser alta y delgada (mucho longitud y poca sección).

Este concepto coloquial de esbeltez se sustituye por el concepto técnico de esbeltez mecánica que se define como la relación existente entre la longitud de pandeo de una barra ( $\alpha \cdot l$ ) y su radio de giro ( $i$ ).

En lugar de la longitud de la barra se considera un concepto más amplio como es el de longitud de pandeo que tiene en cuenta el efecto de las vinculaciones de la barra sobre el pandeo. Y en lugar de la sección entendida como área se utiliza el

radio de giro, que tiene en cuenta la forma en que se distribuye el área en la sección y valora mejor su influencia en el pandeo.

Por último señalar que el estudio de la esbeltez y del pandeo ha de realizarse según los dos planos principales de la barra pues a priori no es posible determinar cuál de los dos va a incidir de forma más importante en el pandeo.

## 2.1. TRAMOS DE PANDEO DE UNA BARRA

En principio la longitud de referencia que se utiliza para calcular la longitud de pandeo es la longitud de la barra. No obstante, el concepto de barra es un concepto equívoco como queda de manifiesto en la fig.5. En efecto si a la barra de la fig. 5.a. se le aplica una carga axial de compresión superior a su carga crítica pandeará tal y como se indica en la figura. Por el contrario, en la fig.5.b se muestra la misma barra del caso 5.a. sometida a una carga axial superior a su carga crítica pero con la diferencia de que en este caso dos puntos intermedios de la misma tienen impedido el desplazamiento relativo respecto a los nudos extremos de la barra. En este segundo caso cuando se produzca el pandeo lo hará de una forma parecida a la indicada en la fig. 5.b produciendo 3 arcos de pandeo en lugar del único arco del caso anterior

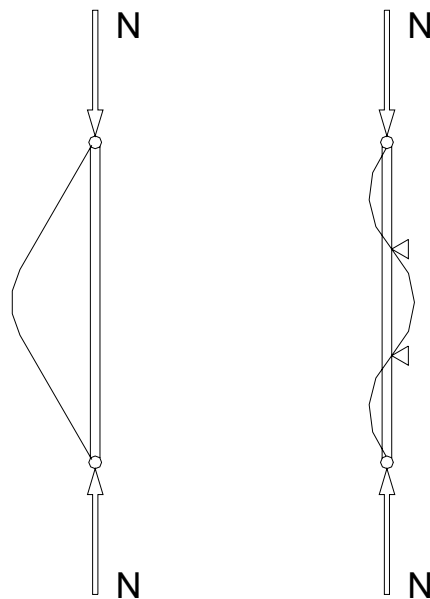


Fig.5 Tramos de pandeo de una "barra"

Por tanto, la longitud de referencia de la fórmula de la esbeltez mecánica no se refiere tanto a la barra en si como a la longitud de referencia de los distintos tramos de pandeo que pueden formarse dentro de la barra, teniendo en cuenta, además, que el número de tramos de pandeo que se puede formar en una barra puede ser diferente en cada uno de sus ejes principales.

La cuestión que sigue es cómo identificar el número de tramos de pandeo que puede generarse en una barra en cada uno de sus ejes, es decir, cómo averiguar por ejemplo si en un entramado de vigas y pilares ha de considerarse la longitud de los pilares por tramos por planta o en su conjunto (fig 6).

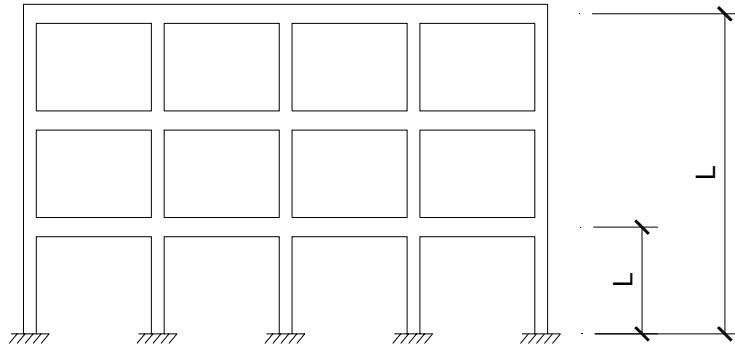


Fig.6 Tramos de pandeo en un entramado

El número de tramos de pandeo que se identifica en una barra en uno de sus planos o ejes principales viene determinado por dos factores que son:

- la presencia de uniones intermedias que tengan impedida la posibilidad de desplazamiento relativo del nudo en cuestión respecto al anterior
- la presencia de uniones rígidas con otras barras que impidan el libre giro de unas respecto a otras.

El concepto de nudo rígido es bastante evidente y no necesita ninguna aclaración, sin embargo conviene aclarar el concepto del desplazamiento relativo impedido.

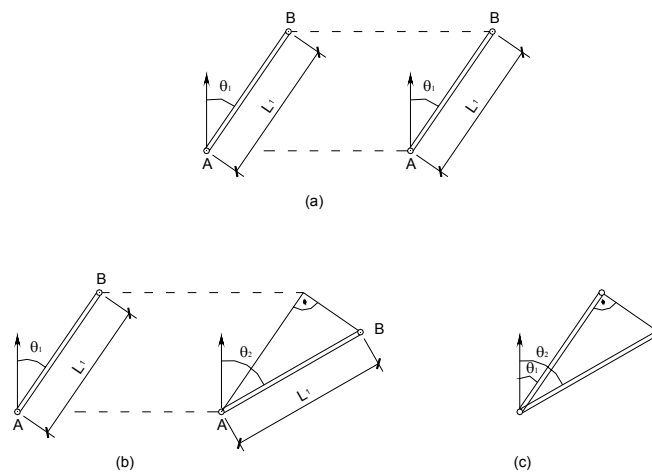


Fig.7 Concepto de traslacionalidad e intraslacionalidad

Dadas dos uniones consecutivas dentro de una barra (o cadena de barras) puede definirse la posición relativa de una de ellas respecto a la otra mediante un sistema de referencia polar (ángulo-distancia) colocado en una de ellas (fig.7.a).

Si como consecuencia de la entrada en carga de la estructura esta adopta una deformada que implica o bien ausencia de desplazamiento o bien un desplazamiento absoluto del tramo en cuestión, pero manteniéndose invariables el ángulo y distancia que presentaba una de las uniones respecto a la otra, a pesar de existir desplazamiento absoluto, no habrá desplazamiento relativo de un extremo respecto al otro y el tramo en cuestión se dirá que es **intraslacional** (fig.7.a)

Por el contrario si como consecuencia de la entrada en carga de la estructura, ésta implica una deformada que supone un desplazamiento absoluto del tramo (fig.7.b) o no (fig.7.c) pero en la que cambia el ángulo (menos frecuentemente la distancia) de la posición de un nudo respecto al otro existirá desplazamiento relativo de un extremo respecto al otro y el tramo en cuestión se dirá que es **traslacional**. Obsérvese que cuando el tramo es traslacional se aprecia un giro de la línea que une los extremos del tramo respecto a la línea inicial o respecto a una paralela a la misma trazada por un extremo del tramo, así como un segmento perpendicular a la citada paralela que mide precisamente el desplazamiento relativo producido. Fig.7 Concepto de traslacionalidad e intraslacionalidad

La cuestión ahora es establecer un criterio para conocer a priori si un tramo va a ser traslacional o intraslacional. El criterio general a aplicar es que, en principio, todo tramo es traslacional (desplazable) a no ser que algo se lo impida, dicho en términos jurídicos, todo es traslacional hasta que no se demuestre lo contrario, y los elementos que con garantía impiden los desplazamientos son en general las triangulaciones y cadenas de arriostramiento vinculados al suelo al menos en dos puntos y las pantallas y núcleos de hormigón armado.

En este sentido, la EHE en su art. 43.3. plantea que podrán considerarse como intraslacionales las estructuras porticadas provistas de muros o núcleos contraviento, dispuestos de forma que aseguren la rigidez torsional de la estructura, siempre y cuando dichos elementos cumplan determinadas condiciones de rigidez.

Planteados los dos factores que delimitan los posibles tramos de pandeo, en la fig.8 aparece un entramado ortogonal con diferentes condiciones de vinculación. En la fig. 8.a. no existe ningún tipo de triangulación, ni arriostramiento ni pantallas y además la unión entre vigas y pilares es articulada por ello las uniones de la cadena de pilares con las sucesivas vigas no presentan ningún impedimento al desplazamiento relativo de unos nudos respecto a otros ni tampoco presenta ningún impedimento al giro entre vigas y pilares. Por ello, al estudiar el pandeo de los pilares habría que considerar la longitud de toda la cadena de pilares como único tramo de pandeo, debido a que la deformada tiene un comportamiento único y continuo en toda esa longitud por lo que hay un único tramo de pandeo, por ello, este esquema estructural propio de estructura metálica solo es factible en la práctica si el número de plantas es reducido.

En la fig.8.b. se observa un entramado similar al anterior, con uniones articuladas entre vigas y pilares, pero provisto de una cadena de arriostramiento en toda su altura. Esta cadena de arriostramiento impide los desplazamientos relativos entre los sucesivos nudos por lo cual la deformada de pandeo se compone de tantos

tramos de pandeo como plantas o tramos de pilar existen. En realidad son tantos tramos de pandeo como tramos de arriostramiento se han colocado.

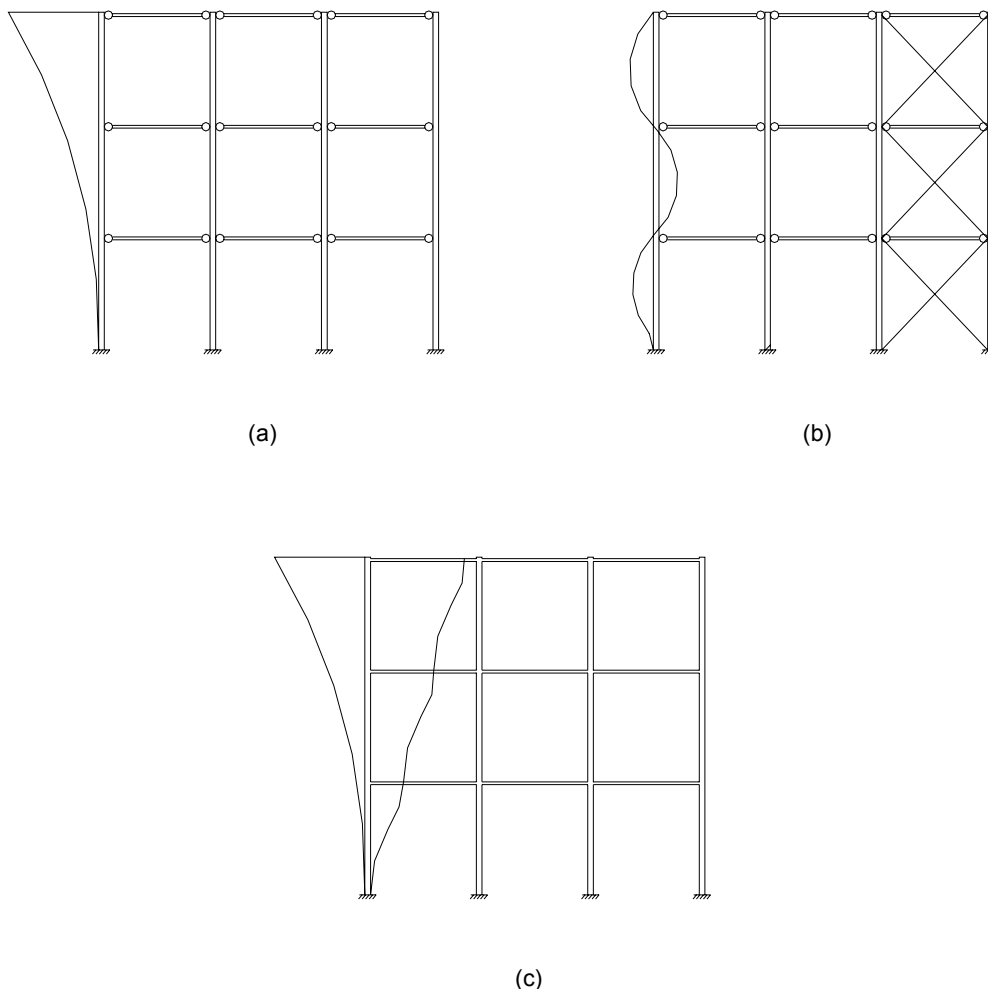


Fig.8. Entramado articulado, articulado-arriostrado y rigido

Por último, en la fig.8.c. se presenta el mismo entramado esta vez sin arriostramiento pero con uniones rígidas . Debido a la oposición al giro que supone cada una de las uniones rígidas entre pilares la deformada del conjunto de la cadena de pilares no presenta un comportamiento único y continuo de principio a fin sino que dicha deformada está formada por la superposición o repetición de sucesivos tramos de igual comportamiento, por ello se identifican también tantos tramos de pandeo como nudos rígidos vayamos encontrando y la longitud de referencia de cada uno de esos tramos, será la que exista entre nudos rígidos consecutivos.

Evidentemente (fig.9), en una estructura pueden convivir los dos sistemas para limitar la longitud de referencia de los tramos de pandeo. En la fig.9.a se observa un entramado de nudos rígidos provisto de una cadena de arriostramiento, y en la fig.9.b aparece un entramado de nudos rígidos estabilizado con una pantalla de hormigón armado.

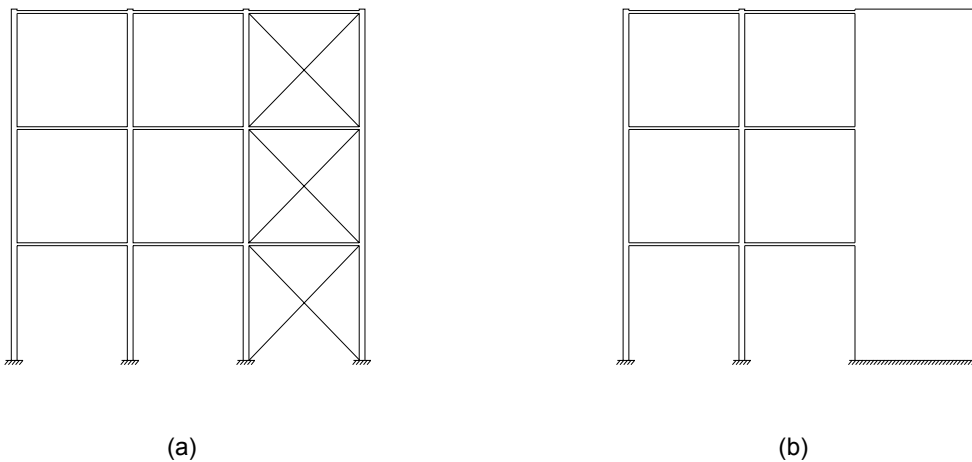


Fig.9 entramados de nudos rígidos con arriostramientos o pantallas

A modo de conclusión puede plantearse que todo tramo limitado por dos uniones sucesivas intraslacionales así como aquellos limitados por dos uniones rígidas sucesivas (sean o no intraslacionales) constituyen tramos de pandeo independientes. En cambio cuando aparecen tramos sucesivos traslacionales con uniones articuladas constituyen en conjunto un único tramo de pandeo.

En el caso de las estructuras de hormigón armado en la inmensa mayoría de los casos, las uniones entre vigas y pilares son rígidas, por ello los entramados de hormigón armado suelen ser del tipo de las fig 8.c o 9.b. Por ello, en entramados de hormigón armado la longitud de los tramos de pandeo coincide en cada plano o eje con la distancia entre nudos rígidos consecutivos.

## 2.2. COEFICIENTE DE ESBELTEZ $\alpha$

Identificados los distintos tramos de pandeo de una pieza, es necesario valorar a continuación la influencia que tiene sobre la tendencia al pandeo de los mismos el tipo de vinculaciones que se producen en las uniones de los extremos del tramo de pandeo.

En efecto dados dos tramos de pandeo de igual longitud resulta bastante intuitiva la idea de que los tramos traslacionales (fig.10.a) tienen en general mayor tendencia o facilidad de pandeo que los intraslacionales (fig.10.b.) por encontrarse los primeros más “suelos” (dicho en términos coloquiales)

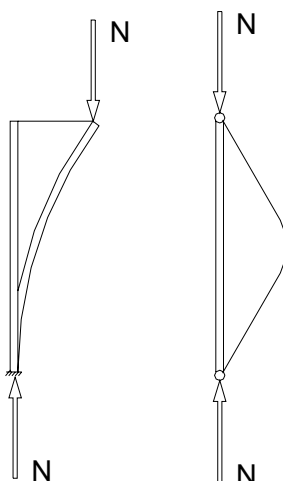


Fig. 10 Tramo intraslacional frente a tramo traslacional

Asimismo, en la fig.11 aparecen dos tramos de pandeo intraslacionales de igual longitud, que presentan diferente facilidad o tendencia al pandeo debido a las diferentes uniones que presentan en sus extremos. En el primero (fig.11.a.) las uniones de sus extremos son articulaciones, en el segundo (fig.11.b) las uniones de los extremos son empotramientos perfectos. Resulta evidente de nuevo la idea intuitiva de que el caso primero tiene mayor facilidad para pandear que el segundo porque el tipo de uniones que presenta le hace estar más “suelto”

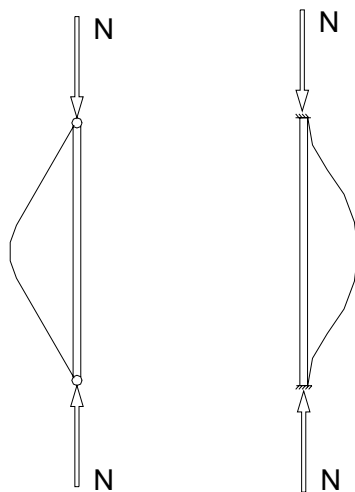


Fig.11 Tramo articulado frente a tramo empotrado

Es decir, desde un punto de vista intuitivo se observa que un tramo de pandeo tendrá mayor facilidad de pandear cuanto más “suelto” esté, y esto se produce cuanto más traslacionales y menos rígidos sean sus extremos.

Más técnicamente, se plantea que la tendencia al pandeo de un determinado tramo de pandeo (valorada por el coeficiente de esbeltez  $\alpha$ ) depende de dos factores que son:

- La traslacionalidad o intraslacionalidad del tramo de pandeo
- El grado de empotramiento de los extremos del tramo de pandeo.

Precisamente el cálculo del coeficiente de esbeltez  $\alpha$  se realiza a partir del análisis de estos dos factores

La determinación de si un tramo es traslacional o intraslacional ya se ha planteado en el apartado anterior.

Por lo que respecta al grado de empotramiento de los extremos del tramo, valora la oposición al giro de dicho extremo que ejercen las barras que cruzan al tramo en cuestión.

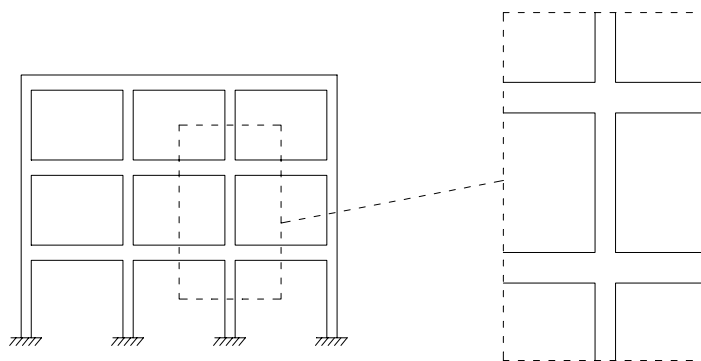


Fig.12 esquema de tramo genérico de pórtico ortogonal

La norma EHE define en su art.43.1.2 el grado de empotramiento  $\Psi$  de un extremo de un tramo de pandeo como la relación

$$\Psi = \frac{\sum \frac{E \cdot I}{L} \text{ (Soportes)}}{\sum \frac{E \cdot I}{L} \text{ (Vigas)}}$$

siendo :

- $\Psi$  el grado de empotramiento del extremo en cuestión
- E módulo de elasticidad longitudinal del hormigón
- I Inercia bruta de la sección
- L longitud del tramo considerado

En caso de emplear hormigón de similares características en todas las barras (como habitualmente ocurre) el módulo de elasticidad longitudinal E será el mismo y por tanto puede suprimirse de la ecuación. Por otra parte, es preciso comentar que la norma EHE en su redacción hace referencia expresa a soportes (en el numerador) y vigas (en el denominador) ante el hecho habitualmente aceptado de que los pilares

son las barras por antonomasia sometidas a esfuerzo axial de compresión, mientras que en las vigas está generalizada la idea de que el esfuerzo axial que presentan suele ser despreciable frente a los demás esfuerzos (fundamentalmente el momento flector). Hecho este comentario, puede interpretarse que en el numerador, la norma ha colocado los datos referentes a la barra que se está analizando a pandeo y las que llevan su dirección, mientras que en el denominador se colocan las barras que cruzan en sus extremos a la que se está analizando. A partir de estos dos comentarios una expresión más generalizada de la ec. en el caso de ser todos los elementos de hormigón de similares características es:

$$\Psi = \frac{\sum \frac{I}{L} \text{ (Barra analizada)}}{\sum \frac{I}{L} \text{ (Barras que la cruzan)}}$$

La aplicación de esta expresión se realiza del siguiente modo

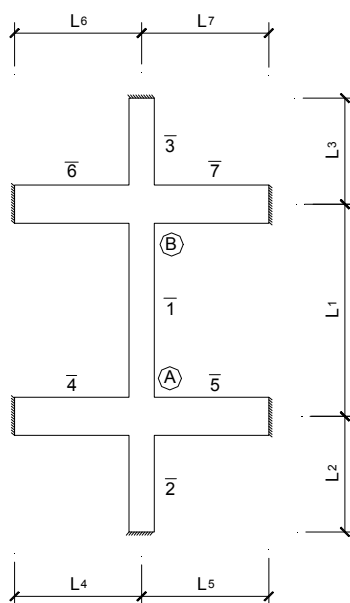


Fig.13. Cálculo de grados de empotramiento

En los entramados habituales de hormigón armado que son ortogonales en cada nudo pueden llegar a confluir hasta cuatro extremos de barra como máximo (de forma habitual). La determinación del grado de empotramiento se realiza para cada uno de los extremos del tramo de pandeo por separado colocando en el numerador la suma de los datos de la barra analizada y la de la barra que llega al nudo, en su caso en la misma dirección de la analizada, y en el denominador el sumatorio de los datos de todas aquellas barras que cruzan a la analizada en el extremo considerado y que ejercen oposición al giro del extremo considerado. Por tanto el grado de empotramiento evalúa la oposición al giro que se presenta en cada uno de los extremos del tramo de pandeo considerado.

En el caso de la fig.13 quedaría del siguiente modo:

$$\Psi_A = \frac{\frac{I_1}{L_1} + \frac{I_2}{L_2}}{\frac{I_4}{L_4} + \frac{I_5}{L_5}} \qquad \Psi_B = \frac{\frac{I_1}{L_1} + \frac{I_3}{L_3}}{\frac{I_6}{L_6} + \frac{I_7}{L_7}}$$

A partir del concepto de grado de empotramiento y de su expresión analítica se obtiene la aplicación a otros casos particulares.

Un extremo articulado (en el tramo de pandeo que se está estudiando) tiene total libertad de giro y, por tanto, no recibe ninguna oposición al giro, es decir el denominador es nulo y la relación de rigideces (inversa del grado de empotramiento) será infinita

Articulación  $\Psi = \infty$

Un empotramiento perfecto, en cambio no tiene ninguna posibilidad de giro, la oposición al giro, por tanto, es total (infinita) y la relación de rigideces (inversa del grado de empotramiento) nula

Empotramiento perfecto  $\Psi = 0$

Asimismo es preciso comentar que en el cálculo del grado de empotramiento no deben considerarse las barras que sean voladizo o lleguen al nudo con unión articulada (fig.15)

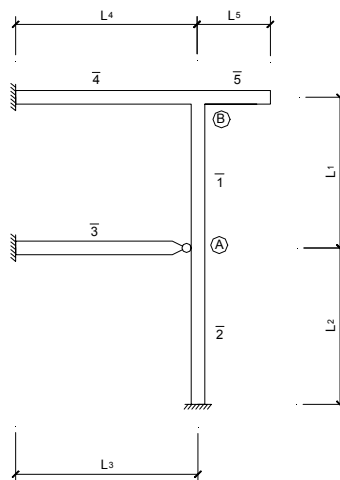


Fig.15 Barras inexistentes, voladizos y barras articuladas

Las barras inexistentes lógicamente no se incluyen en la expresión de la relación de rigideces. Asimismo tampoco se incluyen los voladizos ni las barras que lleguen con articulación por no ejercer ninguna oposición al giro del extremo considerado

Determinada la traslacionalidad o intraslacionalidad del tramo de pandeo y calculadas las relaciones de rigideces de sus extremos la determinación del coeficiente de esbeltez  $\alpha$  se obtiene finalmente aplicando los nomogramas que proporciona la norma EHE en su art. 43.1.2. , por un lado para elementos intraslacionales y por otro para elementos traslacionales fig.16

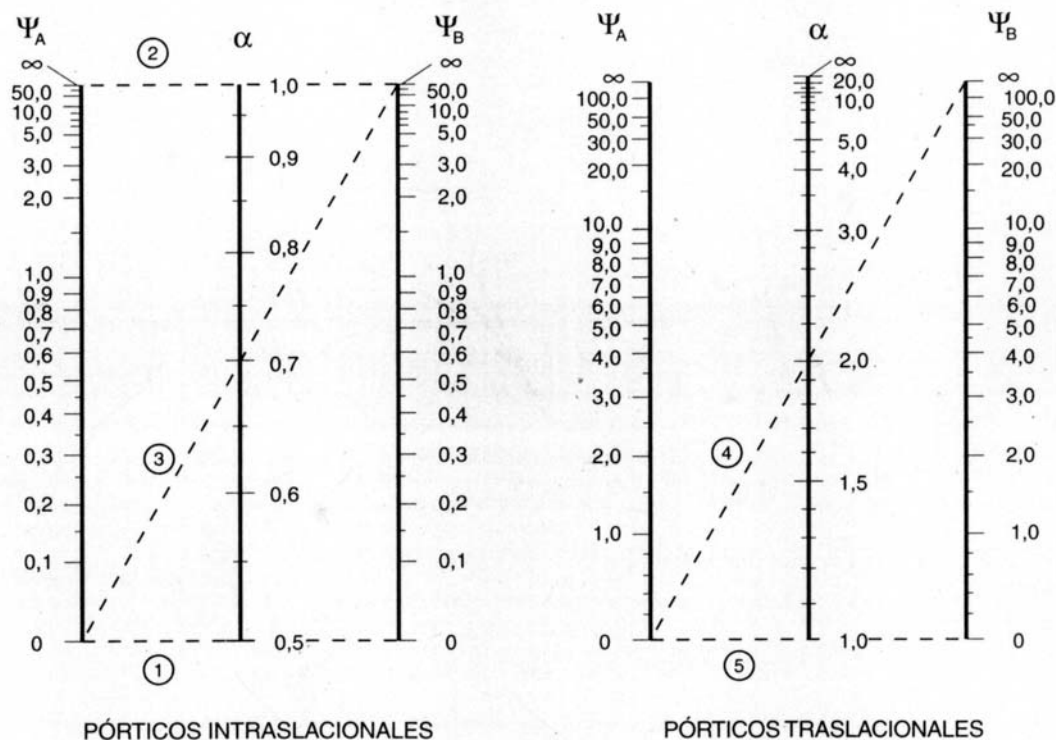


Fig.16 Nomogramas para cálculo del coeficiente de esbeltez

## 2.4. LIMITES DE ESBELTEZ

De acuerdo con lo que establece la norma EHE en sus art. 43.3, 43.4 y 43.5 en el caso de soportes aislados, estructuras intraslacionales y estructuras traslacionales de menos de 15 plantas en las que el desplazamiento máximo en cabeza bajo cargas horizontales características, calculado mediante la teoría de primer orden y con las rigideces correspondientes a las secciones brutas no supere 1/750 de la altura total (fig.17)

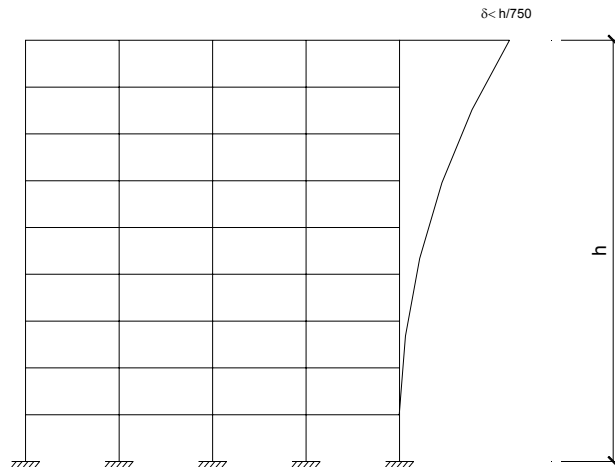


Fig.17 Tipos de estructuras que admiten metodo simplificado

En este tipo de estructuras la norma EHE establece que la esbeltez mecánica de la pieza ( $\lambda$ ) será siempre  $\lambda < 200$ . En el polo opuesto a la limitación, si  $\lambda < 35$  se desprecian los efectos de segundo orden y en consecuencia no se efectúa ninguna comprobación adicional relacionada con la inestabilidad o el pandeo

Dentro del intervalo de las piezas cuya esbeltez sea  $35 < \lambda < 200$ , el cálculo de los efectos de segundo orden sobre la barra se realiza por medio de un método simplificado siempre que la esbeltez sea  $35 < \lambda < 100$ , mientras que si la esbeltez mecánica es  $100 < \lambda < 200$  es preciso utilizar un método general de mayor complejidad.

El esquema general de límites y zonas de esbeltez se representa en la fig.18

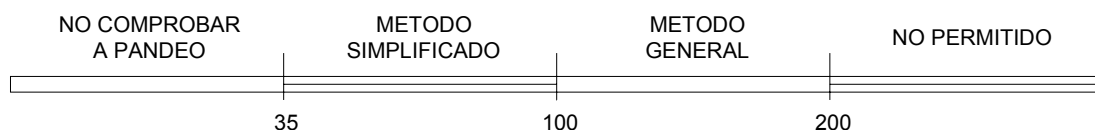


Fig.18 Escala de límites de esbeltez

Dado que lógicamente suele preferirse el método simplificado al general debido a la complejidad de este último, si bien son válidas piezas cuya esbeltez sea hasta de 200 en la práctica, en este primer grupo de estructuras, el límite de esbeltez termina siendo

$$\lambda < 100$$

Por su parte, en estructuras traslacionales de más de 15 plantas, o en aquellas de menos de 15 plantas en las que el desplazamiento máximo en cabeza bajo cargas horizontales características, calculado mediante la teoría de primer

orden y con las rigideces correspondientes a las secciones brutas supere 1/750 de la altura total, el cálculo de los efectos de segundo orden se realizará forzosamente por el método general, estando limitada la esbeltez mecánica de las piezas de forma general art.43.1.1 al límite

$$\lambda < 200$$

En este segundo grupo de estructuras la norma EHE no hace referencia expresa a un valor de esbeltez mecánica por debajo del cual puedan considerarse despreciables los efectos de segundo orden y, por tanto, en este segundo grupo de estructuras la escala de límites de esbeltez será la representada en la fig. 19

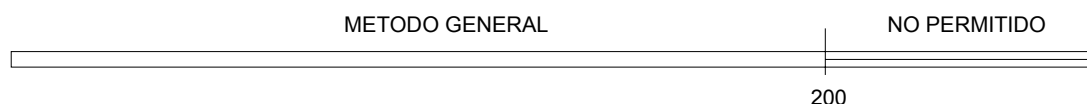


Fig.19 Escala de límites de esbeltez en estructuras del segundo grupo

### 3. EVALUACION DE LOS EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN

Los efectos de segundo orden que habitualmente se desprecian ganan progresiva importancia en piezas esbeltas solicitadas por esfuerzos axiales de compresión siendo su magnitud mayor a medida que aumenta la esbeltez. Por ello, dichos efectos de segundo orden suponen una pérdida de capacidad resistente respecto a los cálculos realizados a partir de los esfuerzos obtenidos según la teoría de primer orden y es preciso contemplar de algún modo esta pérdida de capacidad resistente.

La norma EHE, tal y como ya se ha planteado, propone, por un lado, un método general para comprobar que la estructura no presenta problemas de inestabilidad ni se ve sobrepasada su capacidad resistente por los efectos de segundo orden y, por otro lado, propone un método simplificado aplicable solamente a aquellas estructuras que cumplan una serie de requisitos.

#### 3.1. METODO SIMPLIFICADO

##### 3.1.1. PLANTEAMIENTO DEL METODO

De acuerdo con lo señalado en el apartado 2.4. este método simplificado solo es aplicable a piezas de sección y armadura constante, con esbeltez mecánica  $35 < \lambda < 100$ , que cumplan además la condición de ser soportes aislados, piezas intraslacionales o piezas traslacionales de edificios de menos de 15 plantas y cuyo desplazamiento en cabeza bajo cargas horizontales características, calculado mediante la teoría de primer orden y con las rigideces correspondientes a las secciones brutas no supere el 1/750 de la altura total.

Dada una pieza solicitada en su combinación más desfavorable por un axial  $N_d$  y un Momento  $M_d$  se define la excentricidad de primer orden  $e_0$  (fig.20) como la distancia respecto al eje a la que habría que colocar el axial para conseguir que un esquema de axial excéntrico (fig.20.b) reproduzca los efectos de la situación original de carga (fig.20.a) y, por tanto, sea equivalente a él. Es decir se sustituye la situación real de carga en flexión compuesta, por otra situación ficticia de carga axial excéntrica equivalente a la anterior.

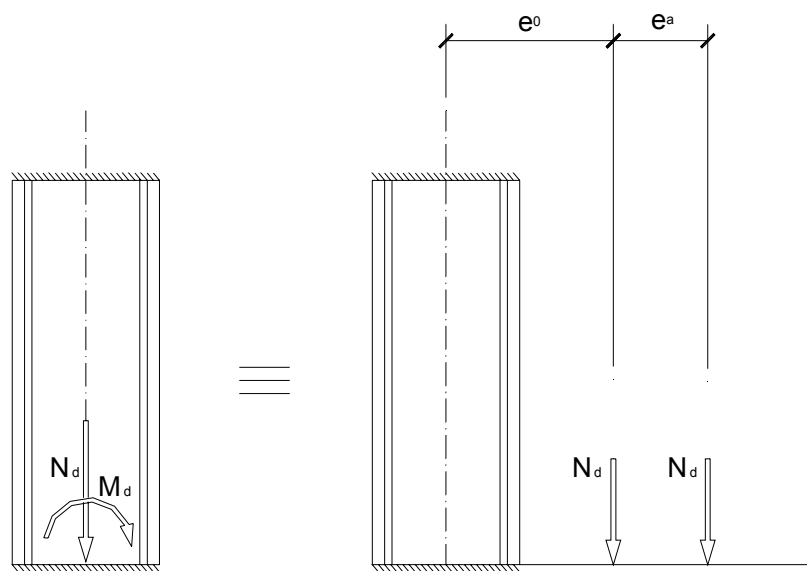


Fig.20 sustitución de la carga real por el axial excéntrico

Es preciso indicar que la norma EHE establece en su art.42.2 que, debido a la incertidumbre en la posición del punto de aplicación del axial, no se considerarán en el cálculo excentricidades de primer orden inferiores a  $h/20$  y  $2\text{cm}$ , siendo  $h$  el lado de la sección perpendicular al eje de flexión considerado (o paralelo al plano de flexión considerado que es otra forma de decir lo mismo ya que por definición el eje de flexión es el perpendicular al plano considerado).

Conocida la excentricidad de primer orden, el método simplificado para valorar los efectos de segundo orden consiste en añadir a la excentricidad de primer orden una excentricidad adicional  $e_a$  (fig.20), de tal modo que el cálculo definitivo de la armadura longitudinal se realiza para una excentricidad total:

$$e_{\text{tot}} = e_0 + e_a$$

La excentricidad adicional no tiene ningún sentido físico, se trata simplemente de una forma sencilla de valorar los efectos de segundo orden de una forma suficientemente aproximada y segura.

Planteadas de forma general la idea del método se expone a continuación cómo aplicarlo a casos reales teniendo en cuenta la tridimensionalidad de las

estructuras y sus cargas, es decir, considerar que toda pieza tiene dos ejes principales y dos posibles planos de pandeo que hay que analizar.

En casos de flexión compuesta recta, es decir la flexión se produce solamente en uno de los planos principales de carga y es nula en el otro, se calculan por separado el plano principal de carga y el segundo plano y se calcula la armadura necesaria para satisfacer las necesidades de cada uno. Es decir, por un lado (fig.23), se calcula el plano principal de carga con su excentricidad de primer orden, su excentricidad adicional y la armadura correspondiente y, por otro lado, se calcula el plano secundario con la excentricidad de mínima de primer orden ( $h/20$  y 2 cm) por no haber flexión en este plano, la correspondiente excentricidad adicional y la armadura que la toca a este cálculo.

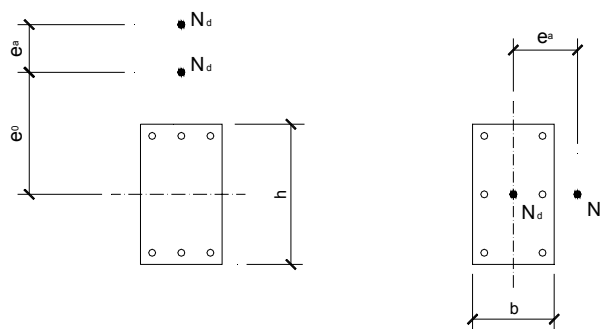


Fig.21. Aplicación en flexión compuesta recta

Hay que matizar que en cada uno de los dos cálculos que se indican en la fig.21 hay que considerar el eje de flexión correspondiente considerando como canto el lado de la sección perpendicular al eje de flexión en cuestión, y que las armaduras que se obtienen en cada caso son las dispuestas en las caras paralelas al eje de flexión en cuestión.

Por último, una vez calculadas las armaduras necesarias en ambas direcciones, se dispone una armadura global que satisfaga las necesidades de ambas direcciones independientemente, ya que dichos efectos no se consideran simultáneamente (fig.22)

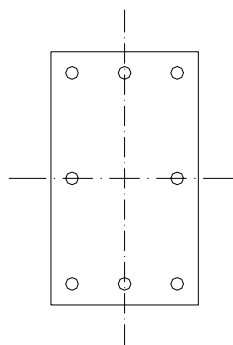


Fig.22 armado global

### 3.1.2.CALCULO DE LA EXCENTRICIDAD ADICIONAL




Según lo establecido por la norma EHE en su art. 43.5.2 el cálculo de la excentricidad adicional vendrá dado por la expresión

$$e_a = (1 + 0,12 \cdot \beta) \cdot (\varepsilon_y + \varepsilon) \cdot \frac{h + 20 \cdot e_0}{h + 10 \cdot e_0} \cdot \frac{l_0^2}{50 \cdot i_c}$$

Siendo:

- $e_a$  Excentricidad adicional
- $l_0$  Longitud de pandeo
- $i_c$  Radio de giro de la sección de hormigón
- $h$  Canto de la sección de hormigón
- $\varepsilon_y$  Límite elástico de deformación del acero
- $\varepsilon$  Parámetro auxiliar para tener en cuenta los efectos de la fluencia
  - $\varepsilon = 0,003$  cuando el axil cuasipermanente no supera el 70% del axil total
  - $\varepsilon = 0,004$  cuando el axil cuasipermanente es mayor que el 70% del axil total
- $\beta$  Factor de armado que se proporciona en la tabla adjunta para los casos de disposición de armaduras más frecuentes

TABLA 43.5.2

| Disposición de armadura   | $i_s^2$                  | $\beta$ |
|---|--------------------------|---------|
|  | $\frac{1}{4}(d - d')^2$  | 1,0     |
|  | $\frac{1}{12}(d - d')^2$ | 3,0     |
|  | $\frac{1}{6}(d - d')^2$  | 1,5     |