

3.8. Ejemplo.

Se va a calcular la matriz de rigidez de un pórtico biempotrado a dos aguas simétrico, de 25 m de luz, 5 m de altura de pilares y 10% de inclinación de cubierta.

Como predimensionamiento se eligen los siguientes perfiles metálicos:

	Perfil	I_z (cm ⁴)	A (cm ²)
Pilar	HEB 280	19270	131
Dintel	IPE 450	33740	98.8

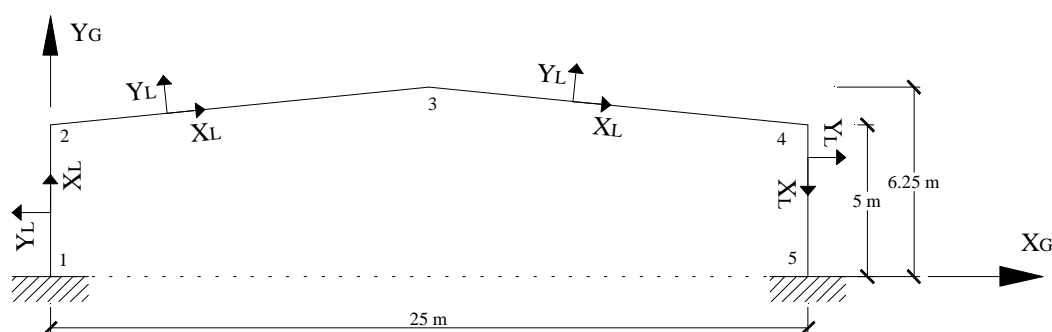


Figura 20: Representación del pórtico ejemplo.

3.8.1. Consideraciones geométricas.

En la figura 20 se representa el pórtico del ejemplo, mostrándose los ejes locales de cada barra y los ejes globales de la estructura. Con todo ello podemos realizar la siguiente tabla, en la cual se determinan las longitudes de las barras del pórtico, así como el ángulo que forman los ejes globales con los ejes locales de cada barra.

Barra	Longitud (cm)	α (°)
1-2	500	90
2-3	1256.23	5.711
3-4	1256.23	354.289
4-5	500	270

3.8.2. Matrices de rigidez de las barras en coordenadas locales.

- Barra 1-2

$$[K_{11}]_L = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 550200 & 0 & 0 \\ 0 & 3884.83 & 971208 \\ 0 & 971208 & 323736000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{12}]_L = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -550200 & 0 & 0 \\ 0 & -3884.83 & 971208 \\ 0 & -971208 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{21}]_L = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -550200 & 0 & 0 \\ 0 & -3884.83 & -971208 \\ 0 & 971208 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{22}]_L = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 550200 & 0 & 0 \\ 0 & 3884.83 & -971208 \\ 0 & -971208 & 323736000 \end{pmatrix}$$

- Barra 2-3

$$[K_{22}]_L = \begin{pmatrix} 165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & 428.88 & 269385.51 \\ 0 & 269385.51 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

$$[K_{23}]_L = \begin{pmatrix} -165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & -428.88 & 269385.51 \\ 0 & -269385.51 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[K_{32}]_L = \begin{pmatrix} -165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & -428.88 & -269385.51 \\ 0 & 269385.51 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[K_{33}]_L = \begin{pmatrix} 165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & 428.88 & -269385.51 \\ 0 & -269385.51 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

- Barra 3-4

$$[K_{33}]_L = \begin{pmatrix} 165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & 428.88 & 269385.51 \\ 0 & 269385.51 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

$$[K_{34}]_L = \begin{pmatrix} -165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & -428.88 & 269385.51 \\ 0 & -269385.51 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[K_{43}]_L = \begin{pmatrix} -165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & -428.88 & -269385.51 \\ 0 & 269385.51 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[K_{44}]_L = \begin{pmatrix} 165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & 428.88 & -269385.51 \\ 0 & -269385.51 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

- Barra 4-5

$$[K_{44}]_L = \begin{pmatrix} 550200 & 0 & 0 \\ 0 & 3884.83 & 971208 \\ 0 & 971208 & 323736000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{45}]_L = \begin{pmatrix} -550200 & 0 & 0 \\ 0 & -3884.83 & 971208 \\ 0 & -971208 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{54}]_L = \begin{pmatrix} -550200 & 0 & 0 \\ 0 & -3884.83 & -971208 \\ 0 & 971208 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{55}]_L = \begin{pmatrix} 550200 & 0 & 0 \\ 0 & 3884.83 & -971208 \\ 0 & -971208 & 323736000 \end{pmatrix}$$

3.8.3. Matrices de rigidez de las barras en coordenadas globales.

- Barra 1-2

La matriz de rotación [R] es:

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener cualquier submatriz $[K_{ij}]$ en coordenadas globales será necesario realizar la siguiente operación:

$$[K_{ij}]_G = [R] \cdot [K_{ij}]_L \cdot [R]^T$$

Las submatrices obtenidas son:

$$[K_{11}]_G = \begin{pmatrix} 3884.83 & 0 & -971208 \\ 0 & 550200 & 0 \\ -971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{12}]_G = \begin{pmatrix} -3884.83 & 0 & -971208 \\ 0 & -550200 & 0 \\ 971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{21}]_G = \begin{pmatrix} -3884.83 & 0 & 971208 \\ 0 & -550200 & 0 \\ -971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{22}]_G = \begin{pmatrix} 3884.83 & 0 & 971208 \\ 0 & 550200 & 0 \\ 971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix}$$

- Barra 2-3

La matriz de rotación [R] es:

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99503719 & -0.099503719 & 0 \\ 0.099503719 & 0.99503719 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las submatrices que se obtienen al premultiplicar las submatrices $[K_{ij}]$ por [R] y posteriormente multiplicar por su transpuesta $[R]^T$ son:

$$[K_{22}]_G = \begin{pmatrix} 163529.25 & 16310.04 & -26804.86 \\ 16310.04 & 2059.88 & 268048.60 \\ -26804.86 & 268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

$$[K_{23}]_G = \begin{pmatrix} -163529.25 & -16310.04 & -26804.86 \\ -16310.04 & -2059.88 & 268048.60 \\ 26804.86 & -268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[K_{32}]_G = \begin{pmatrix} -163529.25 & -16310.04 & 26804.86 \\ -16310.04 & -2059.88 & -268048.60 \\ -26804.86 & 268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[K_{33}]_G = \begin{pmatrix} 163529.25 & 16310.04 & 26804.86 \\ 16310.04 & 2059.88 & -268048.60 \\ 26804.86 & -268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

- Barra 3-4

La matriz de rotación [R] es:

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99503719 & 0.099503719 & 0 \\ -0.099503719 & 0.99503719 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las submatrices $[K_{ij}]$ en coordenadas globales son:

$$[K_{33}]_G = \begin{pmatrix} 163529.25 & -16310.04 & 26804.86 \\ -16310.04 & 2059.88 & 268048.60 \\ 26804.86 & 268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

$$[K_{34}]_G = \begin{pmatrix} -163529.25 & 16310.04 & 26804.86 \\ 16310.04 & -2059.88 & 268048.60 \\ -26804.86 & -268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[K_{43}]_G = \begin{pmatrix} -163529.25 & 16310.04 & -26804.86 \\ 16310.04 & -2059.88 & -268048.60 \\ 26804.86 & 268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[K_{44}]_G = \begin{pmatrix} 163529.25 & -16310.04 & -26804.86 \\ -16310.04 & 2059.88 & -268048.60 \\ -26804.86 & -268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

- Barra 4-5

La matriz de rotación $[R]$ es:

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las submatrices $[K_{ij}]$ en coordenadas globales son:

$$[K_{44}]_G = \begin{pmatrix} 3884.83 & 0 & 971208 \\ 0 & 550200 & 0 \\ 971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{45}]_G = \begin{pmatrix} -3884.83 & 0 & 971208 \\ 0 & -550200 & 0 \\ -971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{54}]_G = \begin{pmatrix} -3884.83 & 0 & -971208 \\ 0 & -550200 & 0 \\ 971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[K_{55}]_G = \begin{pmatrix} 3884.83 & 0 & -971208 \\ 0 & 550200 & 0 \\ -971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix}$$

3.8.4. Ensamblaje de las submatrices.

Únicamente afecta a las submatrices de la diagonal principal.

$$[K_{22}]_G = [K_{22}^{12}]_G + [K_{22}^{23}]_G = \begin{pmatrix} 167414.08 & 16310.04 & 94403.14 \\ 16310.04 & 552259.88 & 268048.60 \\ 944403.14 & 268048.60 & 5493435682 \end{pmatrix}$$

$$[K_{33}]_G = [K_{33}^{23}]_G + [K_{33}^{34}]_G = \begin{pmatrix} 327058.50 & -0.001159 & 53609.72 \\ -0.001159 & 4119.76 & -0.000192 \\ 53609.72 & -0.000192 & 4512151365 \end{pmatrix}$$

$$[K_{44}]_G = [K_{44}^{34}]_G + [K_{44}^{45}]_G = \begin{pmatrix} 167414.08 & -16310.04 & 94403.14 \\ -16310.04 & 552259.88 & -268048.60 \\ 944403.14 & -268048.60 & 5493435682 \end{pmatrix}$$

3.8.5. Matriz de rigidez completa $[K_0]$ del pórtico.

Se muestra a continuación:

3884.83	0	-971208	-3884.83	0	-971208	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	550200	0	0	-550200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-971208	0	323736000	971208	0	161868000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3884.83	0	971208	167414.08	16310.04	944403.14	-163529.25	-16310.04	-26804.86	0	0	0	0	0	0	0
0	-550200	0	16310.04	552259.88	268048.60	-16310.04	-2059.88	268048.60	0	0	0	0	0	0	0
-971208	0	161868000	944403.14	268048.60	549343568.2	26804.86	-268048.60	112803784.1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-163529.25	-16310.04	26804.86	327058.50	-0.001159	53609.72	-163529.25	16310.04	26804.86	0	0	0	0
0	0	0	-16310.04	-2059.88	-268048.60	-0.001159	4119.76	-0.000192	16310.04	-2059.88	268048.60	0	0	0	0
0	0	0	-26804.86	268048.60	112803784.1	53609.72	-0.000192	451215136.5	-26804.86	-268048.60	112803784.1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-163529.25	16310.04	-26804.86	167414.08	-16310.04	944403.14	-3884.83	0	971208	0
0	0	0	0	0	0	16310.04	-2059.88	-268048.60	-16310.04	552259.88	-268048.60	0	-550200	0	0
0	0	0	0	0	0	26804.86	268048.60	112803784.1	944403.14	-268048.60	549343568.2	-971208	0	161868000	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3884.83	0	-971208	3884.83	0	-971208	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-550200	0	0	550200	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	971208	0	161868000	-971208	0	323736000	0

3.8.6. Matriz de rigidez [K] del pórtico.

167414.08	16310.04	944403.14	-163529.25	-16310.04	-26804.86	0	0	0
16310.04	552259.88	268048.60	-16310.04	-2059.88	268048.60	0	0	0
944403.14	268048.60	549343568.2	26804.86	-268048.60	112803784.1	0	0	0
-163529.25	-16310.04	26804.86	327058.50	-0.001159	53609.72	-163529.25	16310.04	26804.86
-16310.04	-2059.88	-268048.60	-0.001159	4119.76	-0.000192	16310.04	-2059.88	268048.60
-26804.86	268048.60	112803784.1	53609.72	-0.000192	451215136.5	-26804.86	-268048.60	112803784.1
0	0	0	-163529.25	16310.04	-26804.86	167414.08	-16310.04	944403.14
0	0	0	16310.04	-2059.88	-268048.60	-16310.04	552259.88	-268048.60
0	0	0	26804.86	268048.60	112803784.1	944403.14	-268048.60	549343568.2