

Estabilidad estructural¹

Javier Rui Wamba, dentro de su primer aforismo («la inestabilidad estructural tiene mucha similitud con la inestabilidad del comportamiento de los seres humanos», realiza una escueta y concisa presentación del fenómeno del pandeo, que merece destacarse por su claridad de exposición y su innegable valor docente.

Uno de los problemas más complejos en la ingeniería estructural y de mayor trascendencia práctica, es el de la inestabilidad de elementos estructurales parcial o totalmente comprimidos y el de las estructuras constituidas por dichos elementos.

Es natural, por tanto, que su análisis y la reflexión sobre su comportamiento hayan atraído la atención de tantas ilustres inteligencias que a lo largo del tiempo han contribuido a establecer los sólidos fundamentos del análisis estructural.

Así, Galileo en el libro editado en 1638 “Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove Scienze”, utilizó el recurso pedagógico y literario del diálogo entre Sagredo y Salviati para plantear la influencia de la esbeltez en la capacidad resistente de una pieza comprimida:

“SAGREDO: Yo estoy convencido por los hechos, pero no comprendo por qué la resistencia no se multiplica en la misma proporción que el material; y yo estoy muy asombrado porque, al contrario, la resistencia aumenta en mayor proporción que la cantidad de material. Así por ejemplo, si comprimimos dos barras cilíndricas, la que tiene doble área soporta no sólo dos veces más la carga, sino tres o tres veces y media más.

SALVIATI: Incluso no se equivocará si dice cuatro veces más.

SAGREDO: Entonces, Salviati, si puedes, tendrías que resolver estas dificultades y clarificar estos conceptos: Porque imagina a qué campo de ideas bellas y útiles da acceso la solución de este problema; y si tú te ocupas de él en tu exposición de hoy, tanto Simplicio como yo, te estaremos muy agradecidos.”

¹ Rui-Wamba, Javier. (1998) Aforismos estructurales. Fundación Esteyco. Madrid.

La prudencia de Galileo y, previsiblemente, sus dotes de observación y experimentación, así como el hábito determinista de la época, le llevó a sugerir la respuesta que figura en el diálogo.

Más de un siglo después, Euler demostró que la respuesta “teórica” era que la barra cilíndrica con doble área que otra, soporta 4 veces más de carga, por cuanto ésta es directamente proporcional a la inercia de la sección que, siendo circular, varía con la potencia cuarta del diámetro.

Hoy la respuesta es que depende, y que la relación de las cargas en el caso expuesto puede variar entre 2, en piezas poco esbeltas, y 4 las de gran esbeltez, y que para precisar el valor hay que aceptar convenciones basadas, ciertamente, en numerosísimos análisis teóricos y experimentales.

Al recordar el itinerario por los que ha discurrido la progresión en los conocimientos sobre la estabilidad estructural, un hito insoslayable se produce en 1744 cuando el gran matemático alemán Leonar Euler (1707-1783) publica el “Methodus inveniendi Líneas curvas...”, en donde por primera vez se planteó la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de la pieza comprimida biarticulada y el valor de la carga para la que “teóricamente” se desestabilizará la pieza. (fig. 1.2)

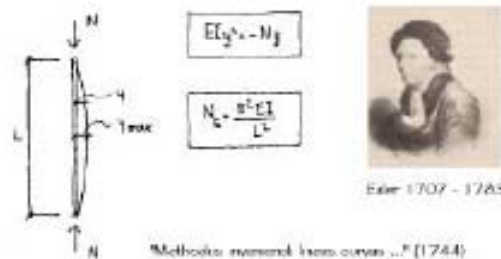


Fig 1.2.

La ecuación diferencial expresa la necesidad de equilibrio entre el momento N·y generado por la carga exterior sobre una sección de la pieza hipotéticamente deformada, y la respuesta o reacción de la sección a la deformación que es el momento interno, proporcional a la rigidez E·I e inversamente proporcional al radio de curvatura que simplifadamente se toma como y”.

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y''$$

Al valor de la carga, N_E , se conoce desde entonces, en honor de su autor, como carga crítica de Euler, y es la fórmula de referencia en la que se basan, explícita o implícitamente, todos los planteamientos modernos de la inestabilidad estructural.

...

A partir de Euler fueron muy numerosos los matemáticos que, al tiempo que impulsaron el desarrollo del cálculo diferencial y de otras especialidades del saber matemático, se interesaron por los problemas de inestabilidad estructural y aplicaron en su solución los nuevos conocimientos disponibles.

Es Lagrange, quien a partir de los trabajos de Euler y D'Alambert, en su memoria "Sur la figure des colonnes", resolvió con generalidad la ecuación diferencial:

$$E \cdot I \cdot y'' = -N \cdot y$$

Demostró que dicha ecuación se cumple para una geometría senoidal de la deformada, de ecuación:

$$y = A \cdot \text{sen}(k \cdot x)$$

siendo A una constante, y $k = \sqrt{\frac{N}{E \cdot I}}$

La ecuación de la deformada cumple la primera condición de contorno, $y=0$ para $x=0$.

Para que se cumpla la segunda: $y=0$ para $x=L$, debe verificarse que:

$$0 = A \cdot \text{sen}(k \cdot L)$$

Este es un típico problema de autovalores, que tiene dos soluciones posibles:

- $A=0$ es decir, que no puede existir otra deformada que la recta, $y=0$, cualquiera que sea el valor de la carga, N , aplicada.
- $\text{sen}(k L) = 0$ cualquiera que sea el valor de la constante A , y por tanto de la amplitud de la deformada senoidal.

Esta condición se cumple siempre que,

$$k \cdot L = n \cdot \pi$$

esto es, para valores de: $k = \frac{n \cdot \pi}{L}$, es decir, para valores de N , tales que:

$N_{cr} = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$, siendo n , el número de ondas de la geometría senoidal del soporte comprimido.

Para $n=1$, tendremos la carga crítica de Euler: $N_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$ (fig. 1-3).

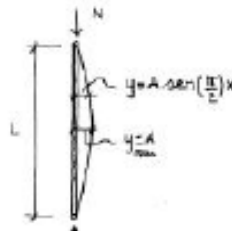


Fig. 1.3

Para otros valores de n , tendremos (fig. 1-4)

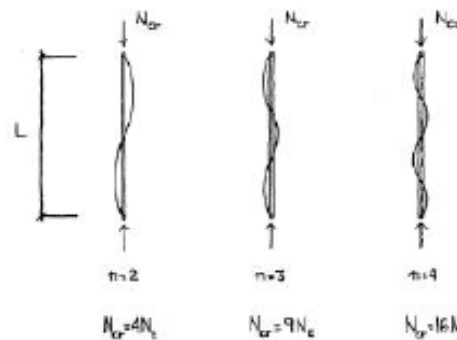


Fig. 1.4

En síntesis, por tanto, la solución de la ecuación diferencial que representa el comportamiento de la pieza comprimida de Euler, tiene dos soluciones posibles:

- I. en la que la pieza comprimida permanece recta, cualquiera que sea el valor, N , de la carga aplicada;
- II. otra, en la que cuando la carga alcanza su valor crítico, N_E , la barra padea con una deformada senoidal quedando indeterminado el valor de su desplazamiento transversal máximo $y_{\max}=A$.

El comportamiento de la barra comprimida, según la teoría de Euler, tiene una representación gráfica muy expresiva (fig. 1-5).

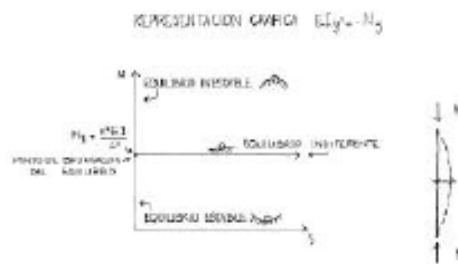


Fig. 1.5

Cuando comenzamos a aumentar la carga sobre el soporte biarticulado, la pieza se mantiene recta y la línea representativa de su comportamiento es la ordenada $y=0$. Es la rama de equilibrio estable simbolizada por la esfera situada en una superficie cóncava que, cuando la soltamos tras un ligero desplazamiento, vuelve a su posición original.

Si continuamos el proceso de carga llegaremos a un valor, el de la carga crítica de Euler.

$$N = N_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

La barra que estamos cargando tendrá, entonces, dos posibilidades teóricas:

- I. Continuar indefinidamente recta, con independencia del valor de la carga. Corresponde a la primera solución de la ecuación diferencial y

está representada por la rama vertical del diagrama que nace del punto, en el que $N=N_E$. Es la rama de equilibrio inestable, simbolizada por la esfera situada sobre una superficie cóncava: cualquier desplazamiento de su posición de *equilibrio inestable* en el vértice provoca su caída incontrolada.

- II. Que alcanzado el valor de la carga crítica $N=N_E$, la pieza se deforme senoidalmente y no acepte ninguna carga adicional, siendo irrelevante la amplitud de la deformada. Esta posibilidad queda representada por la rama horizontal del diagrama que parte del punto N_E : es la rama de *equilibrio indiferente*, y se puede simbolizar con la esfera situada en un plano horizontal. Si la desplazamos de su posición horizontal, la esfera se queda en la nueva posición.

Del punto del diagrama, para el que la carga coincide con la crítica de Euler, N_E , nacen, por tanto, dos ramas teóricamente posibles: la de equilibrio inestable ($y=0$, $N>N_E$) y la de equilibrio indiferente ($y\neq 0$, $N=N_E$). Por ello, se le denomina *punto de bifurcación de equilibrio*.

El comportamiento de la barra comprimida, modelizado por la formulación de Euler y representado en el diagrama con las tres formas posibles de equilibrio y la brusca posibilidad de que se produzca la bifurcación de equilibrio, no corresponde a la percepción que tenemos de su comportamiento real.

Recordemos, a modo de ejemplo, la imagen entrañable de Charlot descargando una parte de su peso en su bastón. Según la teoría de Euler, el bastón permanecerá recto en tanto el peso del cómico no alcance el valor crítico y, sobrepasado éste, el bastón se combaría pudiendo ser cualquiera su geometría.

La realidad no es así. El bastón comenzará a combar en cuanto Charlot se apoye en él. Y la deformación será mayor cuando se incremente la carga (fig.1-6).

PERCEPCIÓN HUMANA DE LA INESTABILIDAD ESTRUCTURAL
 HUMAN PERCEPTION OF STRUCTURAL INSTABILITY

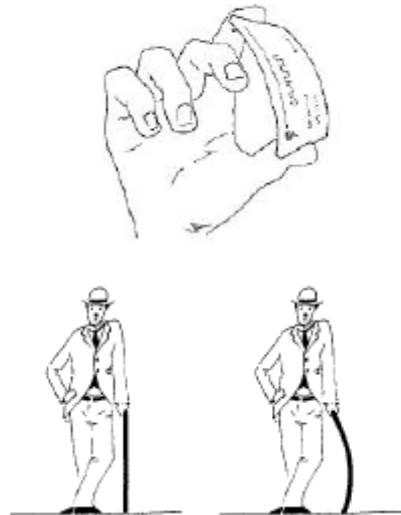


Fig. 1.6

También podemos verificar con una tarjeta de visita, la inconsistencia del planteamiento de Euler. Percibimos que hay que ejercer un esfuerzo significativo para iniciar la combadura de la tarjeta, pero que, a continuación, ligeros incrementos de la presión que ejercemos con los dedos, incrementa notoriamente su deformación.

Podríamos estar frente a uno de esos ejemplos que a veces, inadecuadamente, se citan, de *discrepancias* entre la “teoría” y la “práctica” fomentando ámbitos autónomos e incommunicados entre los que practican la ingeniería y los que investigan y enseñan sus fundamentos. Pero se trata más bien de un excelente ejemplo de todo lo contrario. Euler no estaba equivocado, aunque los resultados de sus planteamientos difiriesen notablemente de los que se pueden observar y medir en la realidad.

Euler partió de unas hipótesis muy claras que simplificaban y hacían posible el análisis de la pieza comprimida. La observación, el estudio y la experimentación, han ido progresivamente acotando el campo de validez de las hipótesis de partida de Euler y ajustando los valores que resultan de las formulaciones consiguientes con los “reales”, expresión que es, por otra parte, imprescindible entrecomillar. Pero la metodología que nació con Euler y sus continuadores, permanece y ha sido esencial como marco eficaz del progreso en nuestros conocimientos sobre la estabilidad estructural.

La causa de las incoherencias entre comportamiento real y teórico de la pieza comprimida se encuentra en las hipótesis de las que Euler, conscientemente, partió para establecer la ecuación diferencial.

Euler supuso, en efecto:

- que inicialmente la pieza que va a ser comprimida tiene una geometría perfectamente recta;
- que la carga N , está perfectamente centrada y alineada con la directriz recta de la pieza;
- que el material es perfectamente e indefinidamente elástico manteniendo sus características, cualquiera que sea el nivel de carga;
- que la pieza está totalmente distensionada y no existen tensiones residuales autoequilibradas que puedan influir en su comportamiento.



Fig. 1.7

Ninguna de estas “perfecciones” son atributos de la pieza real. Euler modelizó una pieza idealizada, sin imperfecciones.

La “pieza real” por contraste con la “pieza perfecta o ideal” de Euler, se caracterizará por los siguientes rasgos:

- Su directriz no será nunca perfectamente recta. Es inevitable una deformación inicial de geometría impredecible.

- La carga no estará nunca perfectamente centrada. Es inevitable una cierta excentricidad de las cargas aplicadas.
- El material de la pieza no tiene un comportamiento indefinidamente lineal y elástico, por lo que no es indiferente el nivel de cargas y deformaciones a las que estará sometido.
- Los procesos de fabricación y manipulación de las piezas y los efectos de las condiciones ambientales (gradientes de temperatura, por ejemplo), generan inevitables tensiones residuales que se autoequilibran pero que afectan al comportamiento de la pieza real.

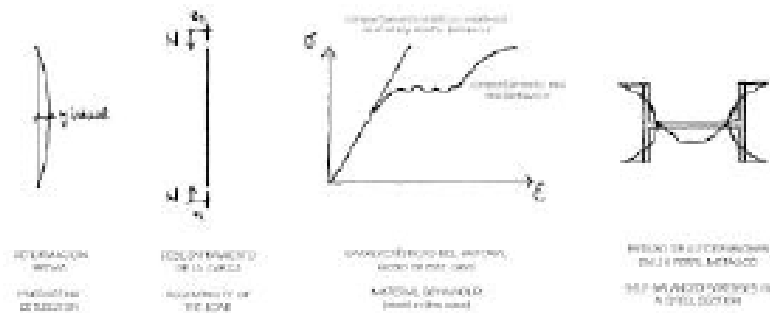


Fig. 1.8.

Si aceptamos, con objeto de modelizar el comportamiento de la pieza real, que el conjunto de sus imperfecciones mecánicas equivale a una deformación inicial única y que, en consecuencia, la pieza real tiene inicialmente una geometría senoidal con una flecha máxima en el centro y_0 , la ecuación de equilibrio que ya hemos visto para la pieza ideal, se transformará en la de equilibrio de la pieza “real” (fig. 1.10).

$$N \cdot \left(y + y_0 \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot X}{L} \right) = -E \cdot I \cdot y''$$

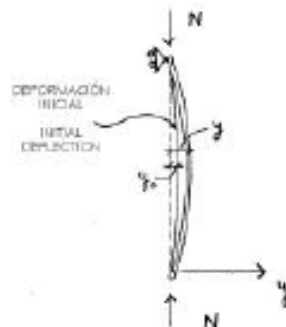


Fig. 1.10

La solución aproximada de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$y = y_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{N}{N_E}}$$

Expresa que el efecto de una compresión N en el soporte equivale a una amplificación de la deformada inicial, y_0 , siendo el factor de amplificación:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_E}}$$

o desarrollando en serie

$$\mu = 1 + \frac{N}{N_E} + \left(\frac{N}{N_E}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_E}\right)^3 + \dots$$

De esta manera, a cada valor de N le corresponde un valor de y , habiendo desaparecido la inverosímil indeterminación que, al respecto, resultaba para la pieza perfecta o ideal (fig. 1.11).

La curva N - y , que es la que nos interesa destacar a los efectos del aforismo que hemos enunciado, es asintótica con la carga crítica de Euler y está naturalmente acotada en su validez por las limitaciones que imponen las características del material y las tensiones residuales inevitablemente presentes en la pieza analizada.

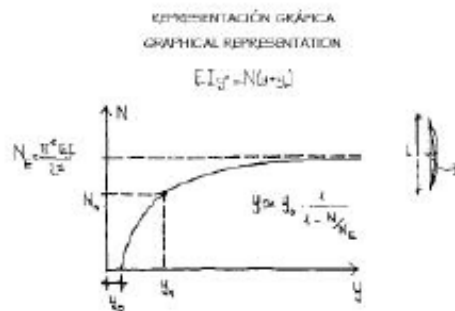


Fig. 1.11

Así, en el caso de un soporte metálico, la capacidad máxima de un soporte biarticulado se identifica con la cota más elevada de la curva que hace la transición entre la N-y, que supone el material indefinidamente elástico y una deformación inicial y_0 , y la que señala la capacidad máxima de la sección de un material caracterizado por su límite elástico, f_y , dividido por un coeficiente de seguridad, γ_a , como valor máximo alcanzable.

Es lo que, a modo de recuerdo, ha quedado representado en la siguiente figura (fig. 1.12).

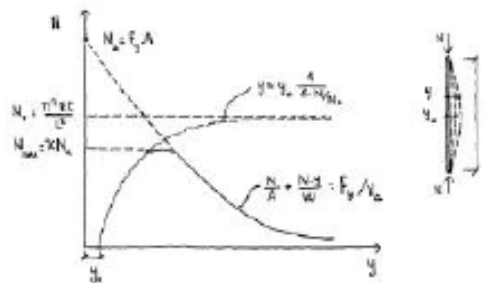


Fig. 1.12

Quede también constancia que en todo tipo de estructuras, de hormigón o de acero estructural, o mixtas o de madera, el planteamiento de la verificación de la estabilidad estructural o del pandeo como habitualmente se denomina, es análogo aunque no siempre lo parezca. En todas ellas el problema consiste en decidir cuál es la curva que representa la capacidad de la sección

$$\left(\frac{N}{A} + \frac{N \cdot y}{W} \right) = \frac{f_y}{\gamma_a}, \text{ en las metálicas}$$

y cuáles son los valores de la deformación inicial, y_0 , y de la carga crítica de Euler,

$$N_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

lo que a su vez plantea el arduo problema de establecer el valor de la rigidez $E \cdot I$ y de la longitud de pandeo L que se debe considerar cuando, como suele

ser habitual, las deformaciones de los extremos del soporte están coaccionadas.