

3. Método de cálculo.

Como método de cálculo vamos a seguir el método de los desplazamientos, en el que las incógnitas son los desplazamientos de los nudos de la estructura.

Y para estudiar el método, y ver como se determina la matriz de rigidez del pórtico, se va a sistematizar. En primer lugar hay que hallar la matriz de rigidez de cada una de las barras que componen la estructura, referidas a unas coordenadas locales propias de cada barra. Posteriormente todas estas matrices se refieren a unas coordenadas globales propias de la estructura, para finalizar agrupándolas en la matriz de rigidez del pórtico, en la cual quedan incorporadas las condiciones de compatibilidad y de equilibrio de todos los nudos.

3.1. Sistemas de ejes coordenados.

En una estructura continua plana se utiliza un sistema de ejes globales X_G, Y_G para toda la estructura y un sistema de ejes locales X_L, Y_L para cada barra.

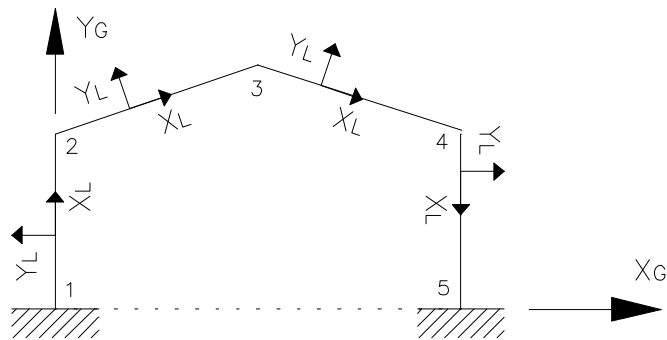


Figura 6. Ejes locales y globales en un pórtico biempotrado.

Tanto en un sistema como en otro, el eje X es el eje longitudinal de la barra y el eje Y se obtiene girando 90° el eje X en sentido sinextrorsum (a izquierdas).

En el sistema de ejes locales de una barra 1-2, el eje X coincide con la directriz de la barra y su sentido positivo es el de avance desde el extremo que se considera origen -1- hasta el extremo final -2-. A este sistema de ejes se refieren las sollicitaciones y los desplazamientos de la barra.

En el sistema de ejes globales del pórtico se refieren las coordenadas de sus nudos, sus desplazamientos, las fuerzas que equilibran sus nudos y las cargas que actúan sobre la estructura.

3.2. Vectores de desplazamientos y de fuerzas.

Los nudos de una estructura experimentan desplazamientos y están sometidos a fuerzas externas. Análogamente, los extremos de cualquier barra de la estructura experimentan desplazamientos y están sometidos a fuerzas internas o sollicitaciones. Todos estos desplazamientos de los nudos y de los extremos de las barras y todas las fuerzas internas y externas se representan por matrices columna, que constituyen los vectores de desplazamientos y de fuerzas.

3.2.1. Desplazamientos y fuerzas internas de un nudo.

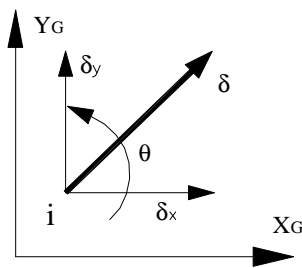


Figura 7. Desplazamientos de un nudo.

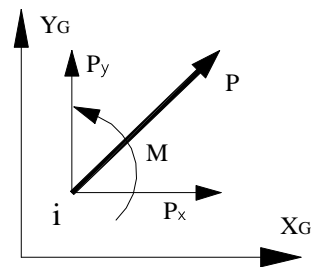


Figura 8. Fuerzas externas sobre un nudo.

Un nudo rígido puede experimentar un desplazamiento longitudinal δ y un desplazamiento angular θ (figura 7). Los sentidos positivos de las componentes δ_x , δ_y del desplazamiento δ son los que coinciden con los sentidos positivos de los ejes globales X_G , Y_G . El sentido positivo del giro θ es el sentido sinextrorsum. Los desplazamientos del nudo i se representan por el vector $\{d_i\}_G$, definido por

$$\{d_i\}_G = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \theta \end{Bmatrix}_G$$

Las fuerzas externas que actúan sobre el nudo i son, en general, la fuerza P y el par de momento M (figura 8). Análogamente, los sentidos positivos de las componentes P_x , P_y de la fuerza P coinciden con los sentidos positivos de los ejes globales X_G , Y_G . El sentido positivo del momento M es el correspondiente a un giro sinextrorsum. Las fuerzas externas sobre el nudo i se representan por el vector $\{P_i\}_G$, definido por:

$$\{P_i\}_G = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M \end{Bmatrix}_G$$

3.2.2. Desplazamientos y solicitaciones en una barra.

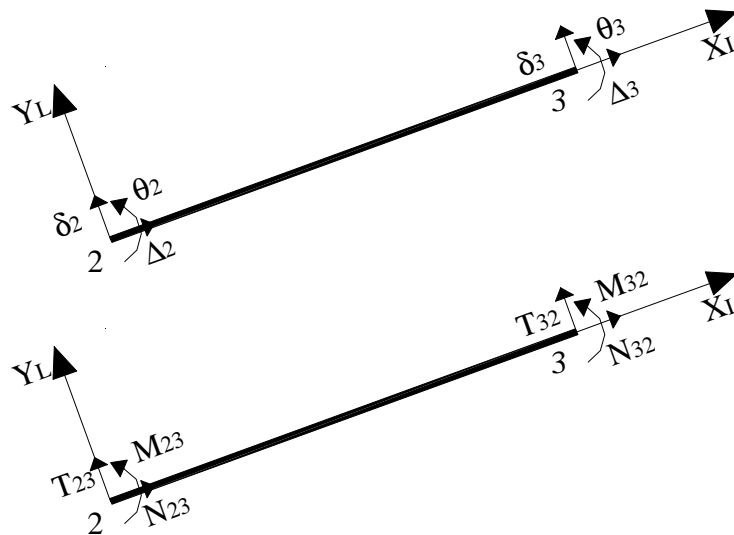


Figura 9. Desplazamientos y solicitaciones en una barra 2-3.

Sea la barra 2-3, que pertenece a un pórtico objeto del estudio. Se adopta el extremo -2- como origen de la barra y se representan el sistema de ejes locales, las solicitaciones y los desplazamientos de sus extremos. Se consideran positivos los desplazamientos longitudinales Δ y transversales δ dirigidos según los sentidos positivos de los ejes locales X_L, Y_L . Sucede igual con los sentidos positivos de las fuerzas normales N y de las fuerzas cortantes T .

Así mismo, los sentidos positivos de los giros θ de las secciones extremas y de los momentos flectores son los correspondientes a giros sinextrorsum.

Los desplazamientos de los extremos 2 y 3 de la barra se representan por los vectores $\{d_2\}_L$ y $\{d_3\}_L$, definidos por:

$$\{d_2\}_L = \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \delta_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_L \quad \{d_3\}_L = \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \delta_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}_L$$

Análogamente, las solicitaciones en los extremos 2 y 3 se representan por los vectores $\{S_2\}_L$ y $\{S_3\}_L$, definidos por:

$$\{S_2\}_L = \begin{Bmatrix} N_{23} \\ T_{23} \\ M_{23} \end{Bmatrix}_L \quad \{S_3\}_L = \begin{Bmatrix} N_{32} \\ T_{32} \\ M_{32} \end{Bmatrix}_L$$

3.3. Matriz de rigidez de una barra en coordenadas locales.



Figura 10. Desplazamientos y solicitaciones en una barra.

En la figura 10 a) se representa una barra 1-2 de sección constante, cuyos extremos experimentan los desplazamientos $\{d_1\}_L = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}_L$ y $\{d_2\}_L = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}_L$. Estos

desplazamientos originan en los extremos de la barra las solicitaciones $\{S_{12}\}_L = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix}_L$ y

$\{S_{21}\}_L = \begin{Bmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix}_L$ (figura 10 b). Según la ley de Hooke y el principio de superposición, entre

los desplazamientos y las solicitaciones existen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} S_1 &= K_{11} \cdot \delta_1 + K_{12} \cdot \delta_2 + K_{13} \cdot \delta_3 + K_{14} \cdot \delta_4 + K_{15} \cdot \delta_5 + K_{16} \cdot \delta_6 \\ S_2 &= K_{21} \cdot \delta_1 + K_{22} \cdot \delta_2 + K_{23} \cdot \delta_3 + K_{24} \cdot \delta_4 + K_{25} \cdot \delta_5 + K_{26} \cdot \delta_6 \\ S_3 &= K_{31} \cdot \delta_1 + K_{32} \cdot \delta_2 + K_{33} \cdot \delta_3 + K_{34} \cdot \delta_4 + K_{35} \cdot \delta_5 + K_{36} \cdot \delta_6 \\ S_4 &= K_{41} \cdot \delta_1 + K_{42} \cdot \delta_2 + K_{43} \cdot \delta_3 + K_{44} \cdot \delta_4 + K_{45} \cdot \delta_5 + K_{46} \cdot \delta_6 \\ S_5 &= K_{51} \cdot \delta_1 + K_{52} \cdot \delta_2 + K_{53} \cdot \delta_3 + K_{54} \cdot \delta_4 + K_{55} \cdot \delta_5 + K_{56} \cdot \delta_6 \\ S_6 &= K_{61} \cdot \delta_1 + K_{62} \cdot \delta_2 + K_{63} \cdot \delta_3 + K_{64} \cdot \delta_4 + K_{65} \cdot \delta_5 + K_{66} \cdot \delta_6 \end{aligned}$$

donde el coeficiente de proporcionalidad K_{ij} , o coeficiente de rigidez K_{ij} de la barra, representa la sollicitación S_i originada por un desplazamiento δ_j unitario.

Estas expresiones pueden escribirse en forma matricial:

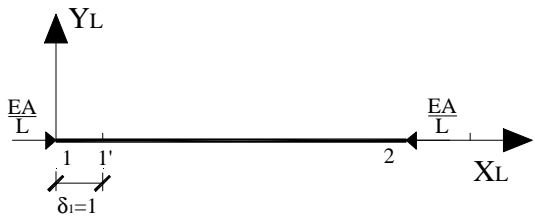
$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_5 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}$$

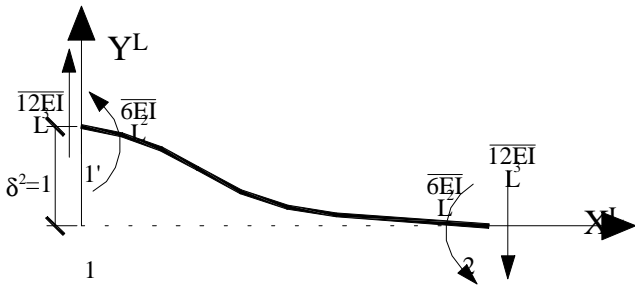
o de un modo más reducido

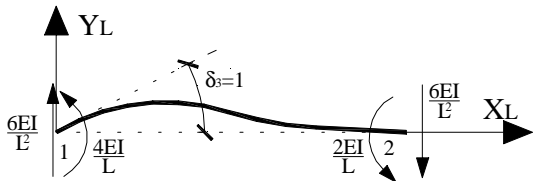
$$\{S\}_L = [K]_L \cdot \{d\}_L \quad [4]$$


siendo $[K]_L$ la matriz de rigidez de la barra en coordenadas locales.

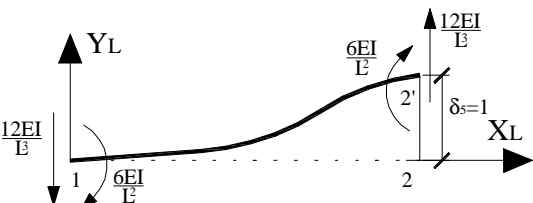
Para determinar los 36 elementos de la matriz $[K]_L$ se provocan aisladamente desplazamientos unitarios dirigidos según δ_1 , δ_2 , ... δ_6 y se calculan mediante las expresiones [1], [2] y [3] las sollicitaciones que originan, que son precisamente los coeficientes de rigidez K_{ij} .

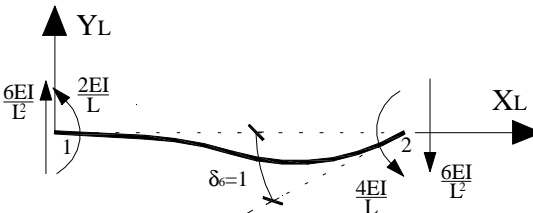
 <p>Figura 11: Desplazamiento $\delta_1=1$.</p>	$K_{11} = \frac{E \cdot A}{L}$	$K_{41} = -\frac{E \cdot A}{L}$
	$K_{21} = 0$	$K_{51} = 0$
	$K_{31} = 0$	$K_{61} = 0$

 <p>Figura 12: Desplazamiento $\delta_2=1$.</p>	$K_{12} = 0$	$K_{42} = 0$
	$K_{22} = \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$	$K_{52} = -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$
	$K_{32} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$	$K_{62} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$

 <p>Figura 13: Desplazamiento $\delta_3=1$.</p>	$K_{13} = 0$	$K_{43} = 0$
	$K_{23} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$	$K_{53} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$
	$K_{33} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$	$K_{63} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L}$

 <p>Figura 14: Desplazamiento $\delta_4=1$.</p>	$K_{14} = -\frac{E \cdot A}{L}$	$K_{44} = \frac{E \cdot A}{L}$
	$K_{24} = 0$	$K_{54} = 0$
	$K_{34} = 0$	$K_{64} = 0$

 <p>Figura 15: Desplazamiento $\delta_5=1$.</p>	$K_{15} = 0$	$K_{45} = 0$
	$K_{25} = -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$	$K_{55} = \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$
	$K_{35} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$	$K_{65} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$

 <p>Figura 16: Desplazamiento $\delta_6=1$.</p>	$K_{16} = 0$	$K_{26} = 0$
	$K_{26} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$	$K_{56} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$
	$K_{36} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L}$	$K_{66} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$

Una vez determinados los coeficientes de rigidez se compone la matriz de rigidez de la barra en coordenadas locales:

$$[K_{12}]_L = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{ccc|ccc} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{array} \right. \\ \hline \left. \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{array} \right. \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez $[K]_L$ tiene las siguientes propiedades:

- Es una matriz cuadrada de orden 6.
- Los elementos de la diagonal principal son positivos y no pueden ser nulos. Ello se debe a que el desplazamiento de un extremo de la barra, en un determinado sentido, exige la aplicación en ese extremo de la sollicitación correspondiente y en el mismo sentido.
- El elemento K_{ij} representa la sollicitación de orden i (S) originada por el desplazamiento unitario de orden j (δ_j).

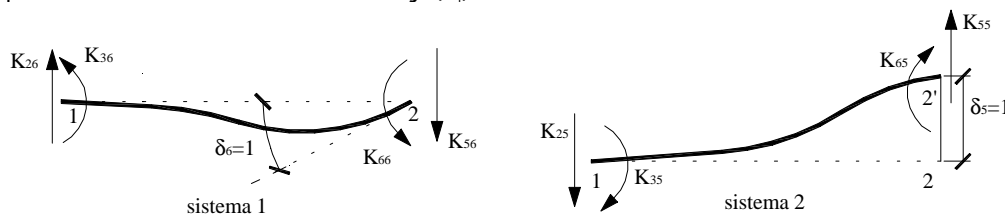


Figura 17: Reciprocidad de los trabajos de deformación.

- Es una matriz simétrica, lo que se demuestra mediante el teorema de Maxwell o de la reciprocidad de los trabajos. En efecto, una igualdad cualquiera entre elementos simétricos, por ejemplo K_{56} y K_{65} (figura 17), se demuestra igualando el trabajo que realizan las fuerzas de un sistema 1 al efectuar los desplazamientos de un sistema 2, al trabajo que realizan las fuerzas de un sistema 2 al efectuar los desplazamientos de un sistema 1.

De la igualdad $W_{1,2} = W_{2,1}$ se deduce

$$-K_{56} \cdot \delta_5 = -K_{65} \cdot \delta_6$$

y teniendo en cuenta que $\delta_5 = 1$ y $\delta_6 = 1$, $K_{56} = K_{65}$.

3.4. Solicitaciones de extremo.

Sustituyendo la matriz de rigidez $[K]_L$ en [4] se obtiene la ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \\ N_{21} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad [5]$$

que determina las solicitaciones de los extremos de la barra en función de los desplazamientos de esos extremos. Teniendo en cuenta las particiones de matrices realizadas, la ecuación matricial [5] puede expresarse en la forma:

$$\begin{Bmatrix} \{S_{12}\} \\ \{S_{21}\} \end{Bmatrix}_L = \begin{pmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \end{Bmatrix}_L \quad [6]$$

o bien

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_L &= [K_{11}]_L \cdot \{d_1\}_L + [K_{12}]_L \cdot \{d_2\}_L \\ \{S_{21}\}_L &= [K_{21}]_L \cdot \{d_1\}_L + [K_{22}]_L \cdot \{d_2\}_L \end{aligned} \quad [7]$$

siendo $\{S_{12}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \end{Bmatrix}$, $\{S_{21}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{21} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix}$, $\{d_1\}_L = \begin{Bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \theta_1 \end{Bmatrix}$ y $\{d_2\}_L = \begin{Bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$ los vectores de

solicitaciones y de desplazamientos de los extremos 1 y 2 en coordenadas locales. Además:

$$[K_{11}]_L = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} \quad [K_{12}]_L = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

$$[K_{21}]_L = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} \quad [K_{22}]_L = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

son las submatrices de rigidez de la barra 1-2 en coordenadas locales.

Una submatriz cualquiera $[K_{12}]_L$ determina las solicitaciones que se originan en el extremo 1 debidas a los desplazamientos del extremo 2. Se observa que las matrices $[K_{11}]_L$ y $[K_{22}]_L$ son simétricas y que las submatrices $[K_{12}]_L$ y $[K_{21}]_L$ son transpuestas.

3.5. Matriz de rigidez de una barra en coordenadas globales.

Sea una barra 1-2 cuyos ejes locales X_L, Y_L están girados un ángulo α respecto a los ejes globales (figura 18).

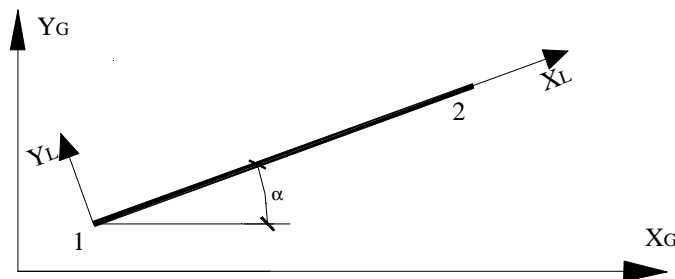


Figura 18: Ejes locales de una barra y ejes globales.

Entre un vector cualquiera $\{V\}_L$ referido a coordenadas locales y ese mismo vector $\{V\}_G$ referido a coordenadas globales existen las relaciones

$$\{V\}_G = [R] \cdot \{V\}_L \quad [8]$$

$$\{V\}_L = [R]^T \cdot \{V\}_G \quad [9]$$

siendo $[R]$ la matriz de rotación definida por:

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Premultiplicando por la matriz de rotación la expresión [7] se obtiene:

$$\begin{aligned} [R] \cdot \{S_{12}\}_L &= [R] \cdot [K_{11}]_L \cdot \{d_1\}_L + [R] \cdot [K_{12}]_L \cdot \{d_2\}_L \\ [R] \cdot \{S_{21}\}_L &= [R] \cdot [K_{21}]_L \cdot \{d_1\}_L + [R] \cdot [K_{22}]_L \cdot \{d_2\}_L \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta [8] y [9]

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_G &= [R] \cdot [K_{11}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_1\}_G + [R] \cdot [K_{12}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_2\}_G \\ \{S_{21}\}_G &= [R] \cdot [K_{21}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_1\}_G + [R] \cdot [K_{22}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_2\}_G \end{aligned} \quad [10]$$

Designando por

$$\begin{aligned} [K_{11}]_G &= [R] \cdot [K_{11}]_L \cdot [R]^T & [K_{12}]_G &= [R] \cdot [K_{12}]_L \cdot [R]^T \\ [K_{21}]_G &= [R] \cdot [K_{21}]_L \cdot [R]^T & [K_{22}]_G &= [R] \cdot [K_{22}]_L \cdot [R]^T \end{aligned}$$

las expresiones [10] se convierten en:

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_G &= [K_{11}]_G \cdot \{d_1\}_G + [K_{12}]_G \cdot \{d_2\}_G \\ \{S_{21}\}_G &= [K_{21}]_G \cdot \{d_1\}_G + [K_{22}]_G \cdot \{d_2\}_G \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{Bmatrix} \{S_{12}\}_G \\ \{S_{21}\}_G \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} [K_{11}]_G & [K_{12}]_G \\ [K_{21}]_G & [K_{22}]_G \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\}_G \\ \{d_2\}_G \end{Bmatrix}$$

De una forma más simple,

$$\{S\}_G = [K]_G \cdot \{d\}_G$$

siendo

$$[K]_G = \begin{pmatrix} [K_{11}]_G & [K_{12}]_G \\ [K_{21}]_G & [K_{22}]_G \end{pmatrix}$$

3.6. Matriz de rigidez completa del pórtico.

Una vez estudiada la matriz de una barra, se va a determinar la matriz de rigidez completa del pórtico. Para ello se considera un nudo común a más de una barra, como es

el caso del nudo de la clave del pórtico, el número 3, común a las barras 2-3 y 3-4 (figura 19).

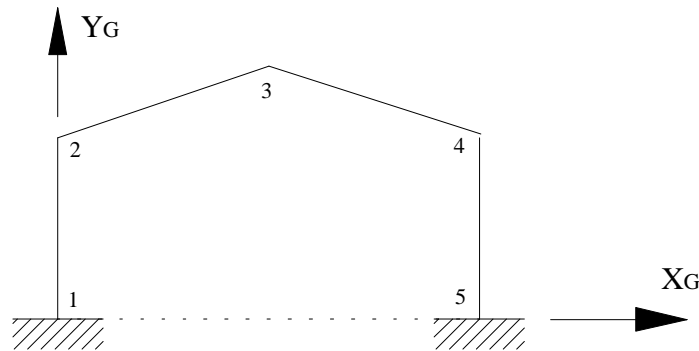


Figura 19: Ejes globales y numeración de nudos en un pórtico.

Las ecuaciones que determinan las sollicitaciones en los extremos de la barra 2-3 en función de los desplazamientos de esos extremos, en coordenadas globales, son:

$$\begin{Bmatrix} S_2^{23} \\ S_3^{23} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [K_{22}^{23}]_G & [K_{23}^{23}]_G \\ [K_{32}^{23}]_G & [K_{33}^{23}]_G \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_2^{23} \\ d_3^{23} \end{Bmatrix}_G \quad [11]$$

De igual modo, las ecuaciones en coordenadas globales que determinan las sollicitaciones en los extremos de la barra 3-4 en función de los desplazamientos de esos extremos son:

$$\begin{Bmatrix} S_3^{34} \\ S_4^{34} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [K_{33}^{34}]_G & [K_{34}^{34}]_G \\ [K_{43}^{34}]_G & [K_{44}^{34}]_G \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_3^{34} \\ d_4^{34} \end{Bmatrix}_G \quad [12]$$

Al ser rígidos los nudos, los desplazamientos del nudo 3 de la barra 2-3 coinciden con los desplazamientos del mismo nudo de la barra 3-4. Se verifican las condiciones de compatibilidad, de modo que:

$$\{d_3^{23}\}_G = \begin{Bmatrix} \delta_{x3}^{23} \\ \delta_{y3}^{23} \\ \theta_3^{23} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{Bmatrix}_G = \{d_3\}_G$$

$$\{d_3^{34}\}_G = \begin{Bmatrix} \delta_{x3}^{34} \\ \delta_{y3}^{34} \\ \theta_3^{34} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{Bmatrix}_G = \{d_3\}_G$$

$$\text{Así, } \{d_3^{23}\}_G = \{d_3^{34}\}_G = \{d_3\}_G$$

Teniendo en cuenta estas condiciones de compatibilidad, las condiciones de extremo dadas por [11] que los desplazamientos de la barra 2-3 originan en los cinco nudos del pórtico pueden expresarse de la forma:

$$\begin{Bmatrix} \{S_1\} \\ \{S_2^{23}\} \\ \{S_3^{23}\} \\ \{S_4\} \\ \{S_5\} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{22}^{23}] & [K_{23}^{23}] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{32}^{23}] & [K_{33}^{23}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \\ \{d_3\} \\ \{d_4\} \\ \{d_5\} \end{Bmatrix}_G$$

De igual modo, las solicitaciones de extremo que los desplazamientos de la barra 3-4 originan en los nudos del pórtico, recogidas en la expresión [12], pueden escribirse así:

$$\begin{Bmatrix} \{S_1\} \\ \{S_2\} \\ \{S_3^{34}\} \\ \{S_4^{34}\} \\ \{S_5\} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{33}^{34}] & [K_{34}^{34}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{43}^{34}] & [K_{44}^{34}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \\ \{d_3\} \\ \{d_4\} \\ \{d_5\} \end{Bmatrix}_G$$

El efecto que producen los desplazamientos de todas las barras, o sea, los desplazamiento de todos los nudos de la estructura, se recoge en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} \{S_1^{12}\} \\ \{S_2^{12}\} + \{S_2^{23}\} \\ \{S_3^{23}\} + \{S_3^{34}\} \\ \{S_4^{34}\} + \{S_4^{45}\} \\ \{S_5^{45}\} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [K_{11}^{12}] & [K_{12}^{12}] & [0] & [0] & [0] \\ [K_{21}^{12}] & [K_{22}^{12}] + [K_{22}^{23}] & [K_{23}^{23}] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{32}^{23}] & [K_{33}^{23}] + [K_{33}^{34}] & [K_{34}^{34}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{43}^{34}] & [K_{44}^{34}] + [K_{44}^{45}] & [K_{45}^{45}] \\ [0] & [0] & [0] & [K_{54}^{45}] & [K_{55}^{45}] \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \\ \{d_3\} \\ \{d_4\} \\ \{d_5\} \end{Bmatrix}_G \quad [13]$$

Se puede comprobar que únicamente se producen sumas de submatrices en la diagonal principal, y que las submatrices nulas son aquellas cuyos subíndices corresponden a dos nudos no contiguos del pórtico.

Ahora bien, el equilibrio de un nudo cualquiera exige que las solicitaciones que el nudo ejerce sobre los extremos de todas las barras que concurren en él formen un sistema equivalente con las fuerzas externas que actúan sobre el nudo. En otras palabras, la suma

de solicitaciones en un nudo debe ser igual a la carga genérica externa aplicada sobre ese nudo.

La expresión matricial de esta condición de equilibrio es, para un nudo genérico i :

$$\sum \{S_i\}_G = \{P_i\}_G$$

Entonces, la ecuación [13] puede escribirse

$$\begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \{P_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [0] & [0] & [0] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{43}] & [K_{44}] & [K_{45}] \\ [0] & [0] & [0] & [K_{54}] & [K_{55}] \end{pmatrix}_G \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \\ \{d_3\} \\ \{d_4\} \\ \{d_5\} \end{Bmatrix}_G$$

es decir,

$$\{P\}_G = [K_0]_G \cdot \{d\}_G \quad [14]$$

siendo $\{P\}_G$ el vector de las fuerzas externas (cargas y reacciones) que actúan sobre los nudos, en coordenadas globales.

$\{d\}_G$ el vector de desplazamiento de los nudos, referido también a coordenadas globales.

$[K_0]_G$ la matriz de rigidez completa de la estructura. Se obtiene de ensamblar las cuatro matrices de rigidez de las barras en coordenadas globales.

3.6.1. Propiedades de la matriz completa $[K_0]$.

- En los pórticos a dos aguas, que constan de cinco nudos ($n = 5$), el orden de la matriz completa es $3 \cdot n$, es decir, 15.
- La matriz de rigidez completa es una matriz simétrica. Las submatrices de la diagonal principal $[K_{ii}]$ son simétricas al proceder a su vez de matrices simétricas. Del mismo modo, las submatrices $[K_{ij}]$ y $[K_{ji}]$, que ocupan cuadrículas simétricas respecto a la diagonal principal, también son submatrices simétricas al ser submatrices de barra transpuestas. Desde un punto de vista energético, toda esta simetría es consecuencia del teorema de Maxwell.

- Los elementos de la diagonal principal nunca pueden ser submatrices nulas.
- La matriz $[K_0]$ es una matriz singular (no tiene matriz inversa). En principio, y hasta ahora se ha constatado, la matriz $[K_0]$ se genera estableciendo las condiciones de equilibrio de todos los nudos de la estructura, como si en el pórtico no hubiese enlaces externos.

Por ello, y como parece razonable, si entre las cargas aplicadas existe equilibrio, el sistema de ecuaciones [14] es indeterminado por haber infinitas soluciones de desplazamientos de los nudos, entre las que se incluye la solución transcendente, que equivale a suponer el pórtico como un cuerpo rígido.

Y en el caso de no existir equilibrio entre las cargas aplicadas, el sistema de ecuaciones [14] es incompatible.

Tanto en un caso como en otro, el determinante es nulo, y por consiguiente la matriz de rigidez del pórtico $[K_0]$ es una matriz singular.

- La matriz de rigidez $[K_0]$ es una matriz en banda, y como ya se ha visto, además simétrica. El semiancho de banda S_b , medido en unidades de submatrices, y sin contar la submatriz de la diagonal principal, es igual a la máxima diferencia existente en la numeración de dos nudos contiguos de la estructura, dada por la expresión:

$$S_b = \max\{(j-i)\} \quad \begin{array}{l} i = 1 \dots n-1 \\ j = 2 \dots n \end{array}$$

siendo i, j nudos contiguos.

Adoptando la numeración de los nudos del pórtico que se muestra en la figura 19, se obtiene como semiancho de banda S_b en este tipo de estructuras

$$S_b = \{(2-1), (3-2), (4-3), (5-4)\} = 1$$

Además, el número máximo de elementos no nulos en cualquier fila f_{\max} contados a partir de la diagonal principal es $f_{\max} = n_s \cdot (S_b + 1)$, siendo n_s el orden de las submatrices. Al ser los pórticos estructuras planas, $n_s = 3$, por lo que $f_{\max} = 3 \cdot (1 + 1) = 6$.

3.7. Matriz de rigidez del pórtico.

La ecuación matricial [14]

$$\{P\}_G = [K_0]_G \cdot \{d\}_G$$

relaciona las fuerzas que actúan sobre los nudos de la estructura, definidas por el vector $\{P\}_G$, con los desplazamientos de esos nudos, definidos por el vector $\{d\}_G$. Esta relación se establece a partir de la matriz de rigidez completa de la estructura $[K_0]$.

Ahora bien, en el vector $\{P\}_G$ intervienen tanto las cargas aplicadas como las reacciones de los enlaces externos. Así mismo, en el vector $\{d\}_G$ intervienen los desplazamientos desconocidos de los nudos libres y los desplazamientos de los nudos unidos a los enlaces externos, que suelen ser nulos en el caso de apoyos o empotramientos, constantes cuando se produce un asiento en un apoyo, o bien función de las reacciones en el caso de apoyos elásticos.

En los pórticos biempotrados a dos aguas, con la numeración de los nudos definida en la figura 19, se observa que en los nudos 2, 3 y 4 los desplazamientos son desconocidos, mientras que en los empotramientos 1 y 5 los desplazamientos han de ser nulos.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la ecuación [14] puede escribirse:

$$\begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \{P_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [0] & [0] & [0] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{43}] & [K_{44}] & [K_{45}] \\ [0] & [0] & [0] & [K_{54}] & [K_{55}] \end{pmatrix}_G \cdot \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{d_2\} \\ \{d_3\} \\ \{d_4\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_G$$

o también:

$$\begin{Bmatrix} \{P_2\} \\ \{P_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_1\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [K_{22}] & [K_{23}] & [0] & [K_{21}] & [0] \\ [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{43}] & [K_{44}] & [0] & [K_{45}] \\ [K_{12}] & [0] & [0] & [K_{11}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{54}] & [0] & [K_{55}] \end{pmatrix}_G \cdot \begin{Bmatrix} \{d_2\} \\ \{d_3\} \\ \{d_4\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_G$$

De forma más reducida:

$$\begin{Bmatrix} \{P_a\} \\ \{R\} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [K] & [K_{II}] \\ [K_I] & [K_{III}] \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_G \quad [15]$$

De aquí se deduce:

$$\{P_a\}_G = [K] \cdot \{d_1\}_G \quad [16]$$

que es la ecuación matricial de la estructura, correspondiente a unas cargas determinadas. En esta ecuación:

$\{P_a\}_G$ es el vector de cargas aplicadas sobre los nudos libres.

$\{d_1\}_G$ es el vector de desplazamiento de los nudos.

$[K]$ es la matriz de rigidez de la estructura que tiene en cuenta únicamente las solicitaciones en los nudos libres, mientras que la matriz de rigidez completa considera las solicitaciones de todos los nudos.

La matriz de rigidez $[K]$ es una matriz de orden m , siendo m el número posible de desplazamientos de los nudos (o grado de indeterminación cinemática de la estructura). En los pórticos biempotrados objeto de estudio, el orden de la matriz $[K]$ es 9, que corresponde con el grado de indeterminación cinemática de estos pórticos.

El principio de unicidad de las soluciones exige que el sistema de ecuaciones [16] tenga solución única. En consecuencia, la matriz de rigidez $[K]$ tiene que ser regular, mientras que, como hemos visto, la matriz de rigidez completa $[K_0]$ es singular.

Además de esta diferencia, y del menor orden de $[K]$ respecto a $[K_0]$, (en pórticos planos biempotrados de 5 nudos el orden de $[K]$ es 9 y el de $[K_0]$ 15), el resto de propiedades coincide.