

4. Desarrollo del método de los desplazamientos.

En la figura 21 se muestra un pórtico biempotrado a dos aguas sometido a una serie de cargas que actúan sobre algunos nudos y barras.

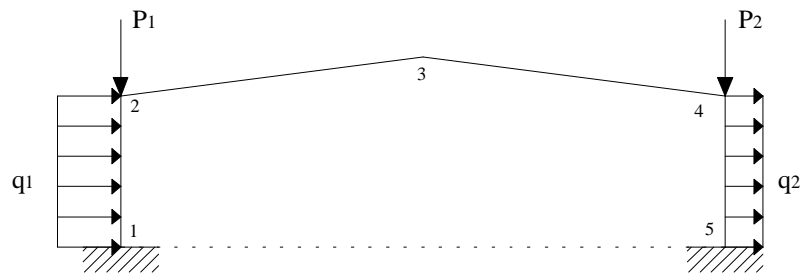


Figura 21: Situación real de cargas.

El método de los desplazamientos, basándose en el principio de superposición, equipara el estado real de carga de una estructura a la suma de los dos estados de carga siguientes:

- Estado de carga 1

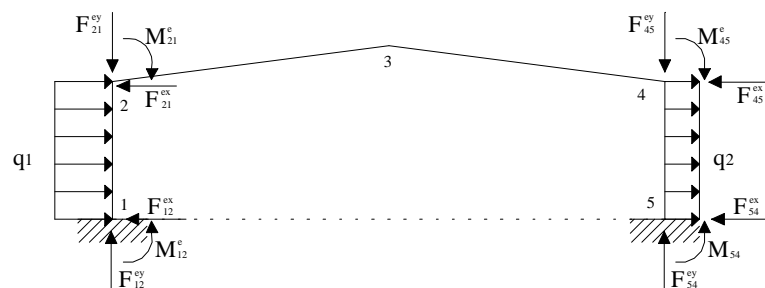


Figura 22: Cargas y reacciones de empotramiento.

Considera que los nudos no giran ni se trasladan. En este caso las barras cargadas se suponen empotradas en sus extremos y, por tanto, sometidas a las cargas y a las reacciones de los empotramientos supuestos (figura 22).

De esta manera se determinan las sollicitaciones de las barras, siendo nulos los desplazamientos en este estado de carga 1.

- Estado de carga 2

Considera las cargas inicialmente aplicadas sobre los nudos, a las que hay que añadir las acciones de empotramiento $-F^e$ y $-M^e$, iguales y de sentido contrario a las reacciones de empotramiento calculadas en el estado de carga 1 (figura 23).

Superponiendo ambos estados de carga se obtiene el sistema de cargas P_i^a que originan los desplazamientos de los nudos (figura 24).

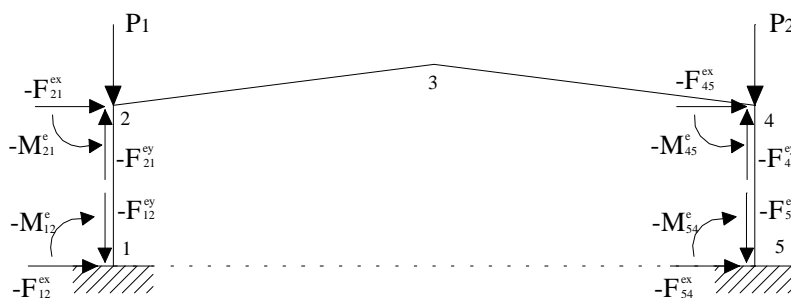


Figura 23: Cargas sobre los nudos y acciones de empotramiento.

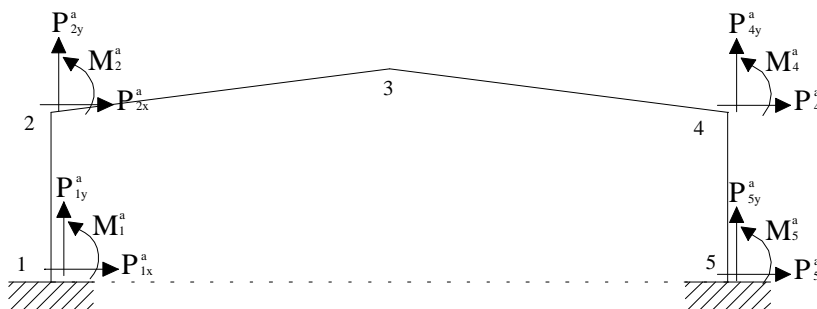


Figura 24: Reacciones de empotramiento.

4.1. Desplazamientos y solicitaciones.

Los desplazamientos de los nudos y las solicitaciones en los extremos de las barras en el estado de carga real se obtienen sumando las correspondientes a los estados de carga 1 y 2.

4.1.1. Estado de carga 1.

En este estado de carga los desplazamientos de los nudos son nulos, pues se parte de la hipótesis de que tienen impedido el giro y el desplazamiento longitudinal y transversal.

Al considerar las barras empotradas en sus extremos se calculan las reacciones de empotramiento de todas las barras cargadas. Estas reacciones en una barra cargada 1-2, referidas a las coordenadas locales de la barra, se representan por los vectores

$$\{R_{12}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{12}^e \\ T_{12}^e \\ M_{12}^e \end{Bmatrix}_L \quad y \quad \{R_{21}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{21}^e \\ T_{21}^e \\ M_{21}^e \end{Bmatrix}_L$$

Las reacciones de empotramiento constituyen las únicas sollicitaciones de extremo del estado de carga 1.

4.1.2. Estado de carga 2.

Premultiplicando los anteriores vectores de reacciones de empotramiento por la matriz de rotación [R] se obtienen los vectores de reacciones de empotramiento en coordenadas globales.

$$\{R_{12}\}_G = \begin{Bmatrix} F_{12}^{ex} \\ F_{12}^{ey} \\ M_{12}^e \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{12}^e \\ T_{12}^e \\ M_{12}^e \end{Bmatrix}_L$$

$$\{R_{21}\}_G = \begin{Bmatrix} F_{21}^{ex} \\ F_{21}^{ey} \\ M_{21}^e \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{21}^e \\ T_{21}^e \\ M_{21}^e \end{Bmatrix}_L$$

Si en un nudo j del pórtico concurren dos barras cargadas ij, ik, la reacción que ejerce el nudo j sobre esas barras es:

$$\{R_j\}_G = \{R_{ij}\}_G + \{R_{jk}\}_G$$

En el estado de carga 2, las cargas que actúan sobre los nudos libres $\{P_a\}_G$ son la suma de las cargas directamente aplicadas en los nudos $\{P_{ad}\}_G$ y de las acciones de empotramiento $\{A^e\}_G$, es decir:

$$\{P_a\}_G = \{P_{ad}\}_G + \{A^e\}_G$$

o sea

$$\{P_a\}_G = \{P_{ad}\}_G - \{R^e\}_G$$

Para este estado de carga, la ecuación matricial del pórtico es:

$$\{P_a\}_G = \{P_{ad}\}_G + \{A^e\}_G = \{P_{ad}\}_G - \{R^e\}_G = [K] \cdot \{d_1\}_G$$

siendo $[K]$ la matriz de rigidez del pórtico estudiada en el apartado (3.7). De esta ecuación matricial se deducen los desplazamientos de los nudos en el estado de carga real.

Las sollicitaciones de extremo en este estado de carga son:

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_L &= [C_{11}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{12}] \cdot \{d_2\}_G \\ \{S_{21}\}_L &= [C_{21}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{22}] \cdot \{d_2\}_G \end{aligned}$$

siendo, como ya se ha visto en [18], $[C_{ij}] = [K_{ij}] \cdot [R]^T$.

4.1.3. Estado de carga real.

Al ser nulos los desplazamientos de los nudos en el estado de carga 1, los desplazamientos $\{d_i\}_G$ hallados en el estado de carga 2 son los desplazamientos de los nudos en el estado de carga real.

Asimismo, sumando las sollicitaciones de extremo correspondientes a los estados de carga 1 y 2 se obtienen las sollicitaciones de extremo en el estado de carga real.

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_L &= \{R_{12}^e\}_L + [C_{11}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{12}] \cdot \{d_2\}_G \\ \{S_{21}\}_L &= \{R_{21}^e\}_L + [C_{21}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{22}] \cdot \{d_2\}_G \end{aligned}$$

o más brevemente

$$\{S\}_L = \{R^e\}_L + [C] \cdot \{d\}_G \quad [23]$$