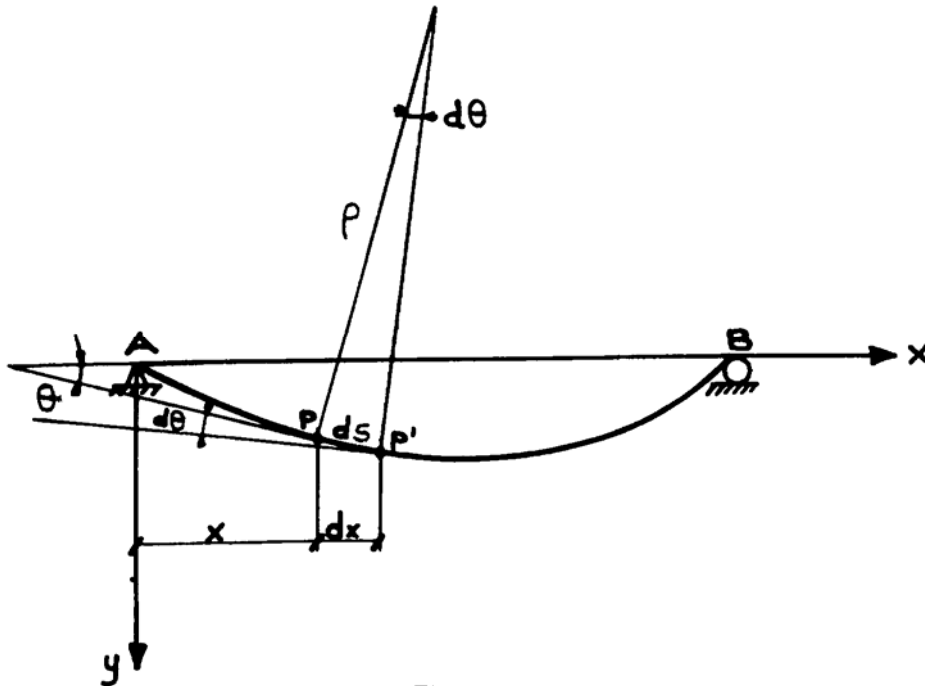


Tema 4: DEFORMACION EN LA FLEXION

- Deformación en las vigas. Ecuación de la elástica.
- Definición de flecha.
- Método del área-momento. Teoremas de Mohr.
- Aplicación de los teoremas de Mohr para la resolución de vigas hiperestáticas.
- Método de la superposición.

DEFORMACION en las VIGAS. ECUACION de la ELASTICA



En el estudio de la flexión pura vemos que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} \quad (1)$$

Para expresar esta curva en coordenadas rectangulares:

$$ds = \rho \cdot d\theta$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

Como el ángulo es muy pequeño:

$$ds \cong dx$$

$$\theta \cong \text{tag}\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| = \frac{1}{\rho} \quad (3)$$

De (1) y (3):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M}{E \cdot I} \quad (4)$$

En la figura $\frac{dy}{dx}$ decreciente $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativa

$\frac{d^2y}{dx^2}$ signo contrario a M

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{E \cdot I} \quad (5)$$

Ecuación diferencial de la elástica

Limitaciones:

- La ecuación es válida para vigas que no estén sometidas a un esfuerzo que exceda del límite elástico de sus materiales.
- Al ser la curvatura pequeña, la ecuación está limitada al estudio de flechas pequeñas.

Si diferenciamos (5) dos veces:

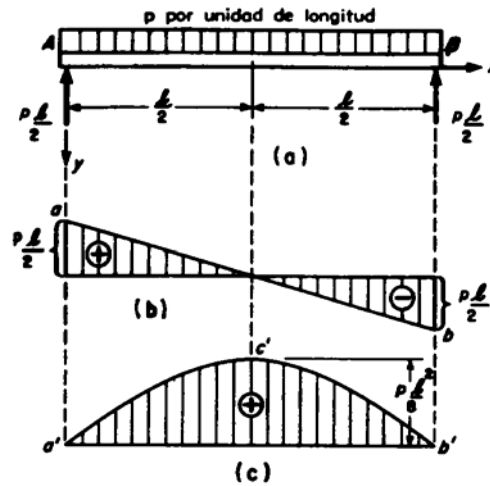
$$E \cdot I \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = - \frac{dM}{dx} = -Q$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = - \frac{dQ}{dx} = q$$

Q Esfuerzo cortante

q Intensidad de carga uniformemente repartida

Ejemplo de obtención de la ecuación diferencial de la elástica



$$M = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$-E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q \cdot l}{2} \cdot x + \frac{q}{2} \cdot x^2$$

Multiplicando los dos miembros por dx e integrando:

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot x^2 + \frac{q}{6} \cdot x^3 + C_1 \quad (1)$$

Para determinar el valor de la constante de integración C_1 :

- La tangente es horizontal en el centro del vano

$$\text{En } x = \frac{l}{2} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = -\frac{q \cdot l \cdot l^2}{16} + \frac{q \cdot l^3}{48} + C_1$$

$$C_1 = \frac{q \cdot l^3}{16} - \frac{q \cdot l^3}{48} = \frac{q \cdot l^3}{24}$$

Introduciendo el valor obtenido de C_1 en (1) se tiene:

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot x^2 + \frac{q}{6} \cdot x^3 + \frac{q \cdot l^3}{24} \quad (2)$$

De nuevo se multiplica los dos miembros por dx y se integra:

$$E \cdot I \cdot y = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot x^3 + \frac{q}{24} \cdot x^4 + \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot x + C_2 \quad (3)$$

Para determinar el valor de la constante de integración C_2 :

- En los apoyos, la deformación vertical es nula

$$\text{En } x = 0 \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$E \cdot I \cdot y = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot x^3 + \frac{q}{24} \cdot x^4 + \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot x \quad (4)$$

Por tanto, la ecuación de la elástica es:

$$y = \frac{q \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (l^3 - 2 \cdot l \cdot x^2 + x^3) \quad (5)$$

Para hallar la **flecha máxima**:

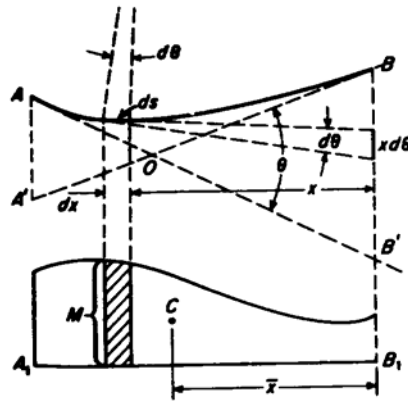
- Se deriva (5), se estudia el punto en que la tangente es nula (se despeja x) y se introduce el valor obtenido en (5).
- Directamente, en $x = \frac{l}{2}$

$$\delta = y_{\text{máx}} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

Para hallar el **ángulo girado** en el apoyo A (máxima pendiente):

$$\text{En } x = 0 \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \theta_A = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

METODO DEL AREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTOS TEOREMAS DE MOHR



$$ds = \rho \cdot d\theta \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{E \cdot I}$$

Como $ds \cong dx$

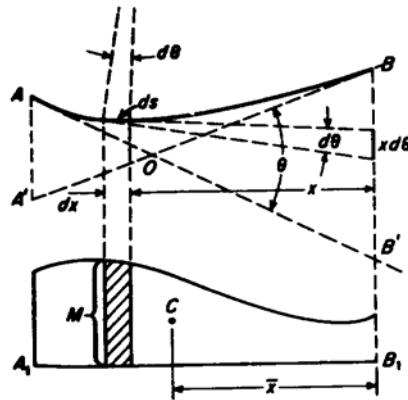
$$d\theta = \frac{M \cdot dx}{E \cdot I}$$

$$\theta = \int_A^B \frac{M \cdot dx}{E \cdot I}$$

TEOREMA I

El ángulo θ comprendido entre las tangentes de dos puntos cualesquiera A y B de la línea elástica es igual al área total del trozo correspondiente del diagrama de momentos, dividida por E·I.

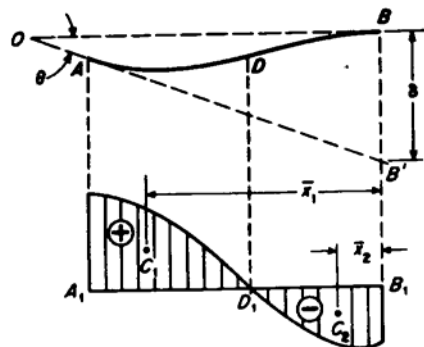
METODO DEL AREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTOS TEOREMAS DE MOHR



$$\delta = \int_A^B x \cdot d\theta = \int_A^B \frac{M \cdot x \cdot dx}{E \cdot I}$$

TEOREMA II

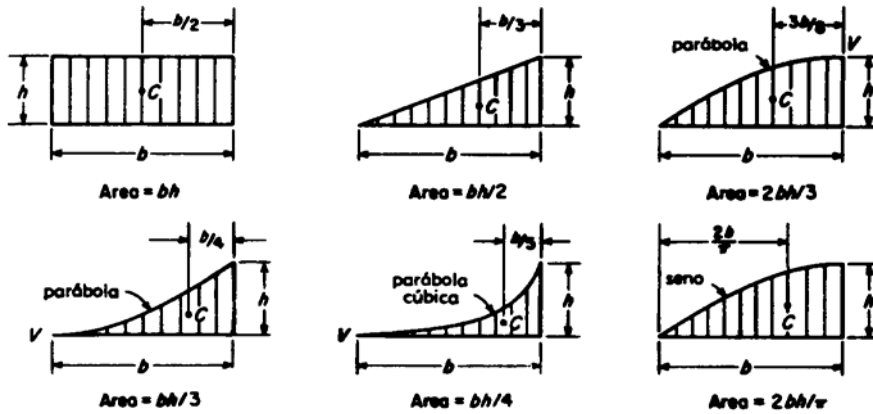
La ordenada B respecto a la tangente en A es igual al momento estático, con respecto a B, del área del diagrama de momentos flectores comprendida entre A y B, dividida por E·I.



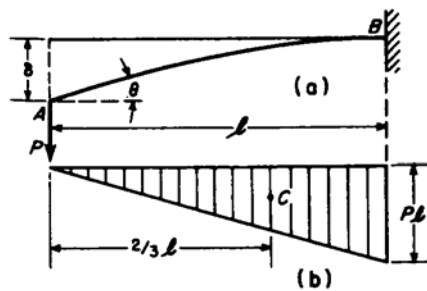
Si existe un punto de inflexión en la línea elástica entre A y B:

$$\delta = \int_A^D \frac{M \cdot x \cdot dx}{E \cdot I} - \int_D^B \frac{M \cdot x \cdot dx}{E \cdot I}$$

$$\delta = \left| \frac{\text{área}}{E \cdot I} \right|_A^D \cdot \bar{x}_1 - \left| \frac{\text{área}}{E \cdot I} \right|_D^B \cdot \bar{x}_2$$



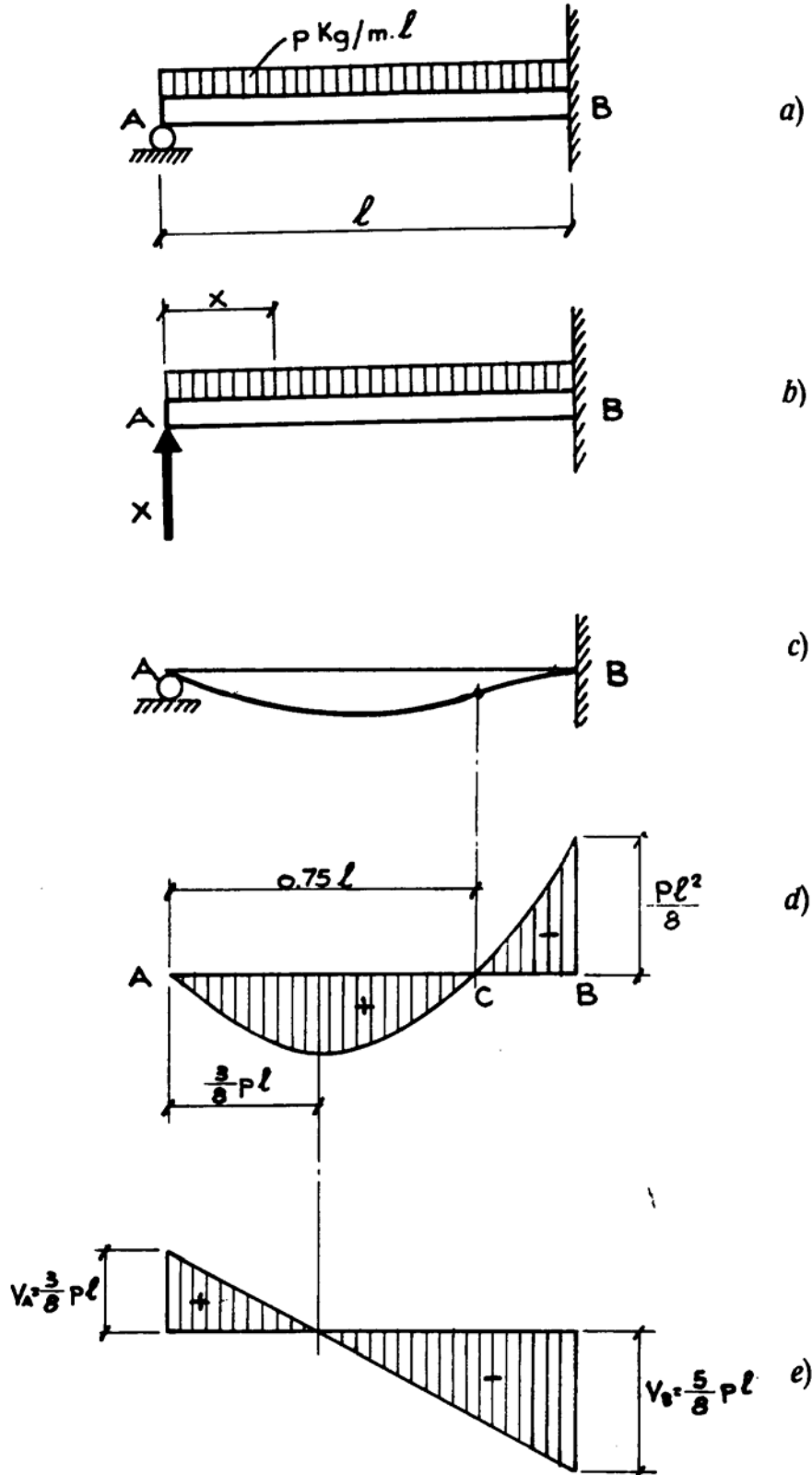
EJEMPLO de APLICACION



$$\theta = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{P \cdot l^2}{2} = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{P \cdot l^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot l}{3} = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

APLICACION DE LOS TEOREMAS DE MOHR PARA LA RESOLUCION DE VIGAS HIPERESTATICAS



Incógnitas:

Ecuaciones:

En A: R_A $\sum F = 0$

En B: R_B y M_B $\sum M = 0$

Resolución del sistema hiperestático:

$$M = R_A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

Por el segundo teorema de Mohr: $\delta_{BA} = 0$

$$0 = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M \cdot x \cdot dx$$

$$0 = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l \left(R_A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} \right) \cdot x \cdot dx$$

$$0 = R_A \cdot \frac{l^3}{3} - \frac{p}{2} \cdot \frac{l^4}{4} \rightarrow R_A = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l$$

$$Q_A = R_A = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l$$

$$M = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

Para $x = l$ $M_B = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot l - \frac{p \cdot l^2}{2} = -\frac{p \cdot l^2}{8}$

$M = 0$ $M = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot l$

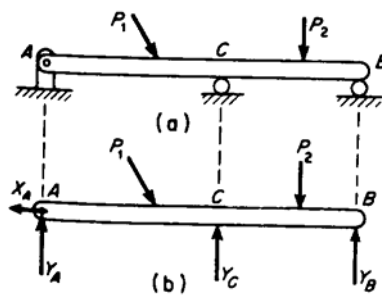
Como $Q = \frac{dM}{dx}$ $Q = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l - p \cdot x$

$Q = 0$ $Q = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l - p \cdot x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{8} \cdot l$

$$M_{\max} = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot l \right) - \frac{p \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot l \right)^2}{2} = \frac{9}{64} \cdot p \cdot l^2$$

METODO DE LA SUPERPOSICION

La ecuación diferencial de la elástica de una viga deformada por cargas transversales es lineal en y , así como sus derivadas. Sus soluciones para varias condiciones de carga pueden superponerse.



Incógnitas:

En A: X_A y Y_A

En B: Y_B

En C: Y_C

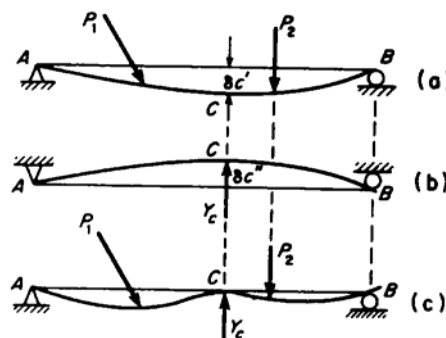
Ecuaciones:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

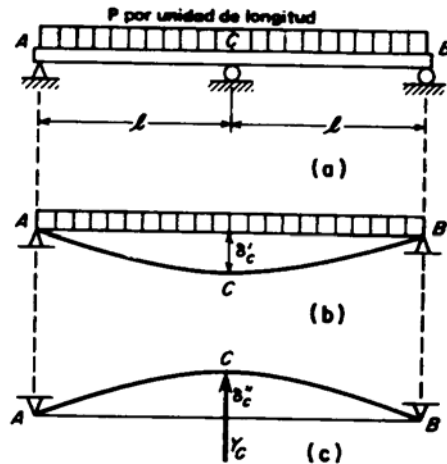
La viga es hiperestática. Para resolverla vamos a aplicar el método de superposición, considerando el rodillo C como elemento superabundante, descomponiendo el estado de cargas original en otros dos: un sistema primario AB con las cargas originarias, y un sistema AB en el que actúa únicamente la reacción Y_C .



El desplazamiento neto del punto C es: $\delta_c = \delta_c' - \delta_c''$

Como el apoyo C impide el desplazamiento, la condición anterior se transforma en: $\delta_c' - \delta_c'' = 0$

METODO DE LA SUPERPOSICION



Elegimos el apoyo C como superabundante. Obtenemos como sistema primario una viga biapoyada con carga uniformemente repartida, de vano $2 \cdot l$. El desplazamiento del punto C será (Prontuario):

$$\delta'_c = \frac{5 \cdot p \cdot (2 \cdot l)^4}{384 \cdot E \cdot I} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I}$$

El segundo estado de carga será el de una viga biapoyada de vano $2 \cdot l$ con una carga puntual ascendente (Y_c) en el centro del vano (Prontuario):

$$\delta''_c = \frac{Y_c \cdot (2 \cdot l)^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{Y_c \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I}$$

El desplazamiento neto del apoyo C será:

$$\delta_c = \delta'_c - \delta''_c = 0$$

$$\frac{5 \cdot p \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{Y_c \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} = 0$$

$$Y_c = \frac{5}{4} \cdot p \cdot l$$

Las reacciones Y_A e Y_B pueden determinarse con facilidad:

$$\sum F_y = 0$$

$$2 \cdot p \cdot l = Y_A + Y_B + Y_C$$

$$Y_A + Y_B = 2 \cdot p \cdot l - \frac{5}{4} \cdot p \cdot l = \frac{3}{4} \cdot p \cdot l$$

$$\sum M_A = 0$$

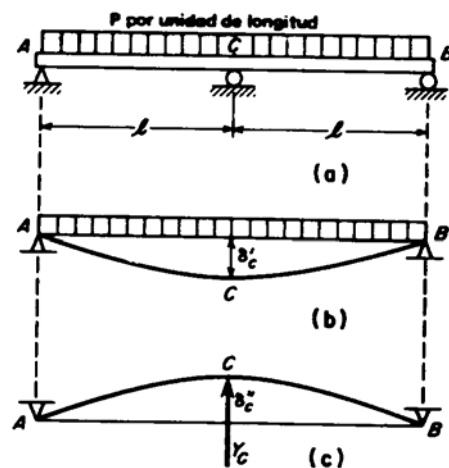
$$Y_C \cdot l + Y_B \cdot 2 \cdot l - 2 \cdot p \cdot l^2 = 0$$

$$\frac{5}{4} \cdot p \cdot l^2 + Y_B \cdot 2 \cdot l - 2 \cdot p \cdot l^2 = 0$$

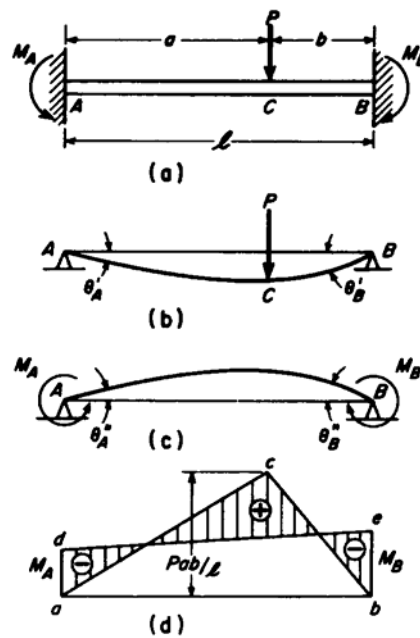
$$Y_B \cdot 2 \cdot l = 2 \cdot p \cdot l^2 - \frac{5}{4} \cdot p \cdot l^2 = \frac{3}{4} \cdot p \cdot l^2$$

$$Y_B = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l$$

$$Y_A = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l$$



METODO DE LA SUPERPOSICION



Incógnitas:

En A: R_A y M_A

En B: R_B y M_B

Ecuaciones:

$$\sum F = 0$$

$$\sum M = 0$$

- Prontuario: Viga biapoyada con carga puntual descentrada.

$$\theta'_A = \frac{P \cdot b \cdot (l^2 - b^2)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l}$$

$$\theta'_B = \frac{P \cdot a \cdot b \cdot (2 \cdot l - b)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l}$$

- Prontuario: Viga biapoyada con momentos en los apoyos.

$$\theta''_A = \frac{M_A \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{M_B \cdot l}{6 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta''_B = \frac{M_B \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{M_A \cdot l}{6 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta'_A - \theta''_A = 0$$

$$\frac{P \cdot b \cdot (l^2 - b^2)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} - \frac{M_A \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{M_B \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} = 0 \quad (1)$$

$$\theta'_B - \theta''_B = 0$$

$$\frac{P \cdot a \cdot b \cdot (2 \cdot l - b)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} - \frac{M_B \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{M_A \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} = 0 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema se determinan los valores de M_A y M_B :

$$M_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2}$$

$$M_B = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2}$$

Para calcular las reacciones:

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot l + M_A - M_B - P \cdot a = 0$$

$$R_B = \frac{P \cdot a}{l} \cdot \left(\frac{l^2 + a \cdot b - b^2}{l^2} \right)$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \cdot l - M_A + M_B - P \cdot b = 0$$

$$R_A = \frac{P \cdot b}{l} \cdot \left(\frac{l^2 + a \cdot b - a^2}{l^2} \right)$$

También se pueden obtener las reacciones por superposición de los dos casos en que se ha descompuesto el sistema original.