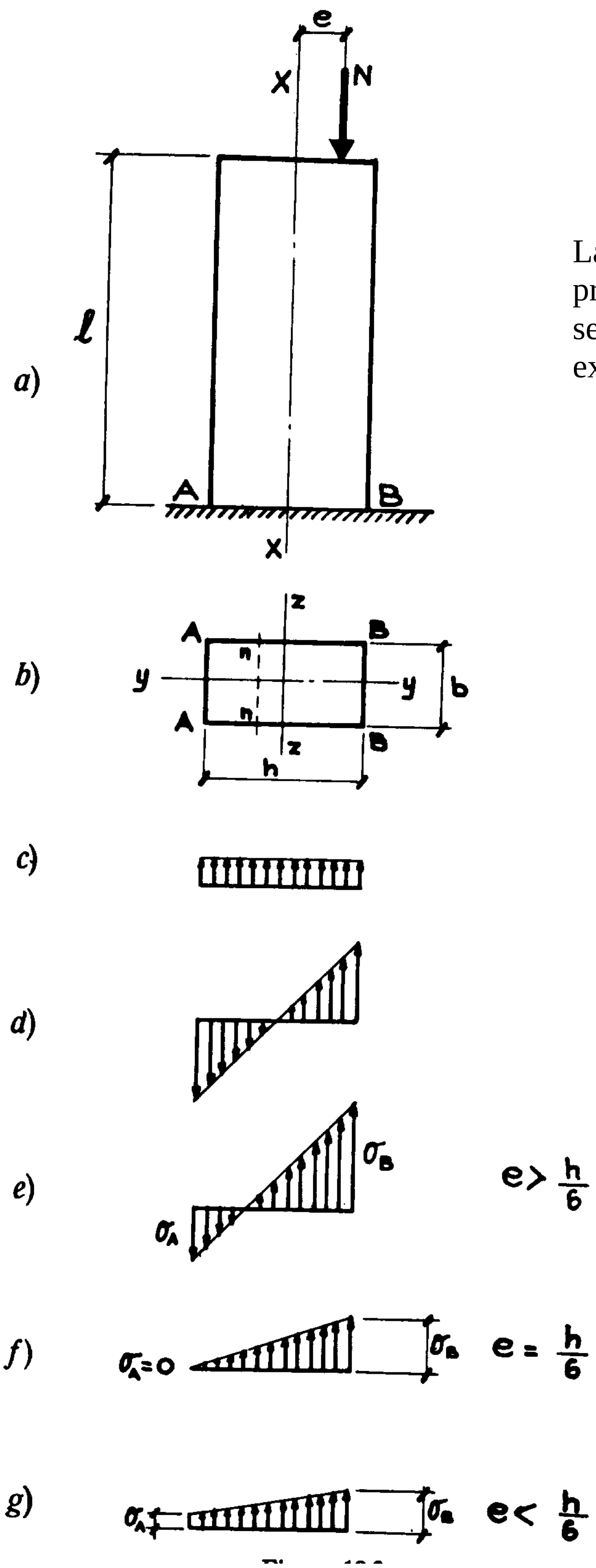
Tema 5: COMPRESION-COLUMNAS

- Carga excéntrica en una barra corta.
- Núcleo de una sección. Caso de secciones rectangulares y circulares.
- Columnas largas. Fórmulas de Euler.
- Esbeltez, tensión crítica y longitud de pandeo.
- Curva de Euler.
- Fórmulas empíricas. Aplicación en la estructura metálica y hormigón de forma conceptual.

CARGA EXCENTRICA EN UNA BARRA CORTA



La **flecha** debida a la flexión producida por la carga excéntrica será **despreciable** comparada con la excentricidad e.

$$W=\frac{1}{6}\cdot b\cdot h^{2}=\frac{1}{6}\cdot A\cdot h$$

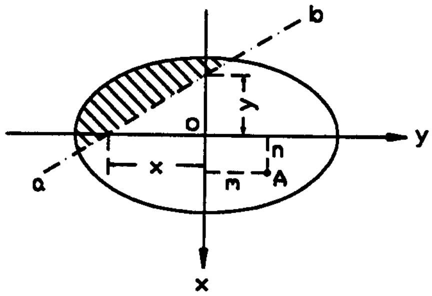
$$\sigma=\frac{N}{A}$$

$$\sigma=\frac{M}{W}=\frac{N\cdot e}{\frac{1}{6}\cdot A\cdot h}=\frac{6\cdot N\cdot e}{A\cdot h}$$

$$\sigma=\frac{N}{A}\cdot\left(1\pm\frac{6\cdot e}{h}\right)$$

NUCLEO DE UNA SECCION

Es la región alrededor del c.d.g.de la sección dentro de la cual si se aplica una carga de compresión *P* producirá compresión en toda la sección



A (m,n) es el **punto de aplicación** de la carga P

Los momentos de P respecto a los ejes OY y OZ serán P·n y P·m.

Aplicando el principio de superposición, la tensión en cualquier punto de la sección transversal definido por las coordenadas (x, y), será:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{(P \cdot m) \cdot y}{I_z} + \frac{(P \cdot n) \cdot z}{I_y}$$

Igualando a cero el segundo miembro se obtiene la ecuación del lugar geométrico de los puntos de tensión nula en la sección transversal:

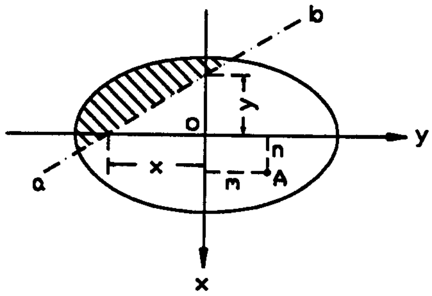
$$\frac{P}{A} + \frac{(P \cdot m) \cdot y}{I_z} + \frac{(P \cdot n) \cdot z}{I_y} = 0$$

$$\frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{m \cdot y \cdot A}{I_z} + \frac{n \cdot z \cdot A}{I_y}\right) = 0$$

Introduciendo las notaciones para los radios de giro r_z y r_y:

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

ingeniería RURAL



$$1+\frac{m\cdot y}{r_z^2}+\frac{n\cdot z}{r_y^2}=0 \quad \rightarrow \quad \text{RECTA}$$

Fibras longitudinales de la zona no rayada de la sección transversal → COMPRESION

Fibras longitudinales de la zona rayada de la sección transversal → TRACCION

Las **intersecciones** *u* y *v* de las rectas con los ejes se determinan como sigue:

- Con OZ: **y = 0** Obtenemos *v*

$$1+\frac{n\cdot z}{r_y^2}=0 \qquad \frac{n\cdot z}{r_y^2}=-1$$

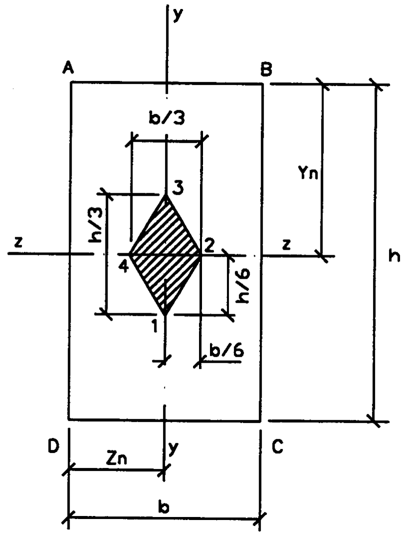
$$z=v=-\frac{r_y^2}{n}$$

- Con OY: **z = 0** Obtenemos *u*

$$1+\frac{m\cdot y}{r_z^2}=0 \qquad \frac{m\cdot y}{r_z^2}=-1$$

$$y=u=-\frac{r_z^2}{m}$$

NUCLEO DE UNA SECCION RECTANGULAR



Consideramos $\mathbf{A}\left(-\frac{b}{2},-\frac{h}{2}\right)$ $\qquad \sigma=\frac{P}{A}-\frac{\left(P\cdot\frac{h}{2}\right)\cdot y}{I_z}-\frac{\left(P\cdot\frac{b}{2}\right)\cdot z}{I_y}=0$

$$1-\frac{h\cdot y}{2\cdot r_z^2}-\frac{b\cdot z}{2\cdot r_y^2}=0$$

- Punto de **corte con** el eje **OZ** [y = 0] $\qquad \frac{b\cdot z}{2\cdot r_y^2}=1$

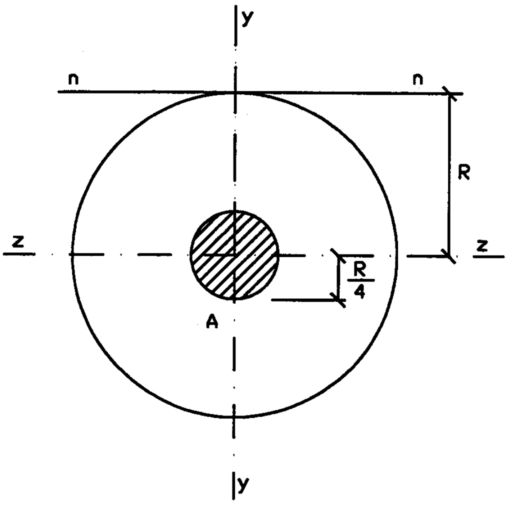
$I_y=\frac{1}{12}\cdot h\cdot b^3 \qquad A=b\cdot h \qquad r_y^2=\frac{b^2}{12}$

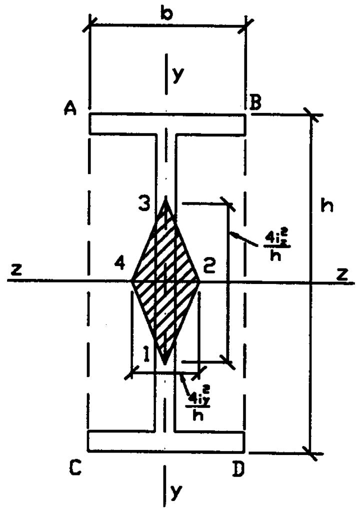
$$z=\frac{2\cdot r_y^2}{b}=\frac{b}{6}$$

- Punto de **corte con** el eje **OY** [z = 0] $\qquad \frac{h\cdot y}{2\cdot r_z^2}=1$

$I_z=\frac{1}{12}\cdot b\cdot h^3 \qquad A=b\cdot h \qquad r_z^2=\frac{h^2}{12}$

$$y=\frac{2\cdot r_z^2}{h}=\frac{h}{6}$$





NUCLEO DE UNA SECCION CIRCULAR

$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{M}{W} = 0$$

$$\frac{P}{A} - \frac{P \cdot e}{\frac{1}{8} \cdot A \cdot d} = 0$$

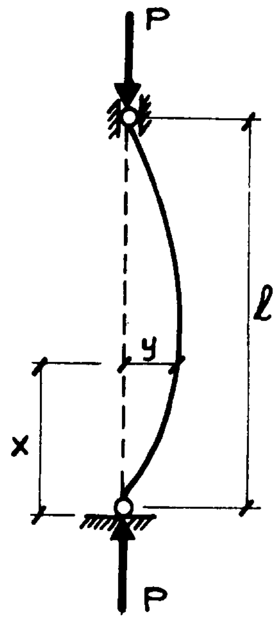
$$\frac{P}{A} \cdot \left(1 \pm \frac{8 \cdot e}{d}\right) = 0$$

$$\frac{8 \cdot e}{d} = 1 \qquad \rightarrow \qquad e = \frac{d}{8}$$

NUCLEO DE UNA SECCION EN I

El núcleo central es un rombo cuyas diagonales son $\frac{b}{3}$ y $\frac{h}{3}$

COLUMNAS LARGAS. FORMULAS DE EULER



$$M_x = P \cdot y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{P \cdot y}{E \cdot I}$$

Si $K^2 = \dfrac{P}{E \cdot I}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2 \cdot y = 0$$

(Ecuación diferencial homogénea)

La integración de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$y = C_1 \cdot \operatorname{sen}(K \cdot x) + C_2 \cdot \cos(K \cdot x)$$

$$y = C_1 \cdot \mathrm{sen}(K \cdot x) + C_2 \cdot \cos(K \cdot x)$$

Para calcular las constantes de integración C_1 y C_2:

En $x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

$$0 = C_1 \cdot \mathrm{sen}0 + C_2 \cdot \cos 0$$

$$C_2 = 0$$

En $x = l \quad \rightarrow \quad y = 0$

$$0 = C_1 \cdot \mathrm{sen}(K \cdot l)$$

Esta condición se verifica si $C_1 = 0$ y entonces la barra permanece recta. También se cumple si:

$$\mathrm{sen}(K \cdot l) = 0$$

$K \cdot l = n \cdot \pi$, siendo n un nº entero.

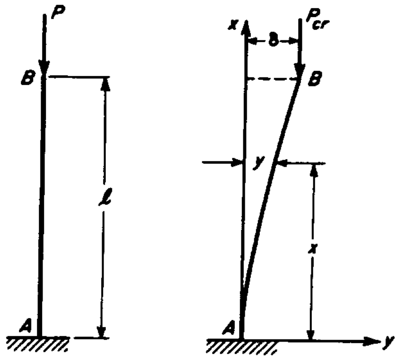
$$K \cdot l = \pi \rightarrow K = \frac{\pi}{l}$$

$$\frac{P_{cr}}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Carga crítica de Euler

COLUMNAS LARGAS. FORMULAS DE EULER



$$M_x = P \cdot (\delta - y)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M}{E \cdot I}$$

Con la elección de los sentidos de los ejes que muestra la figura.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{M}{E \cdot I} = \frac{P \cdot (\delta - y)}{E \cdot I}$$

Si $K^2 = \frac{P}{E \cdot I}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2 \cdot y = K^2 \cdot \delta$$

(Ecuación diferencial de coeficientes constantes)

$$y = y_1 + y_2$$

- Solución general de la homogénea

$$y_1 = C_1 \cdot \mathrm{sen}(K \cdot x) + C_2 \cdot \cos(K \cdot x)$$

- Solución particular de la completa

$$y_2 = \delta$$

$$y = y_1 + y_2 = C_1 \cdot \mathrm{sen}(K \cdot x) + C_2 \cdot \cos(K \cdot x) + \delta$$

Para calcular las constantes de integración C_1 y C_2 :

En $x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

$$0 = C_1 \cdot \text{sen}0 + C_2 \cdot \cos 0 + \delta$$

$$C_2 = -\delta$$

En $x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cdot K \cdot \cos(K \cdot x) - C_2 \cdot K \cdot \text{sen}(K \cdot x)$$

$$0 = C_1 \cdot K - 0$$

$$C_1 = 0$$

$$y = \delta \cdot (1 - \cos(K \cdot x))$$

Para calcular la carga crítica se estudia $x = l \quad \rightarrow \quad y = \delta$

$$\delta = \delta \cdot (1 - \cos(K \cdot l)) = \delta - \delta \cdot \cos(K \cdot l)$$

$$\delta \cdot \cos(K \cdot l) = 0$$

$$\cos(K \cdot l) = 0$$

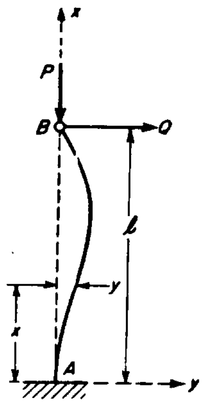
$K \cdot l = \frac{n \cdot \pi}{2}$, siendo n un nº entero impar

$$K \cdot l = \frac{\pi}{2} \rightarrow K = \frac{\pi}{(2 \cdot l)}$$

$$\frac{P_{cr}}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{(2 \cdot l)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(2 \cdot l)^2}$$

COLUMNAS LARGAS. FORMULAS DE EULER



$$M_x = Q \cdot (l - x) - P \cdot y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{Q \cdot (l - x) - P \cdot y}{E \cdot I}$$

Si $K^2 = \dfrac{P}{E \cdot I}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2 \cdot y = K^2 \cdot \frac{Q \cdot (l - x)}{P}$$

$$y = y_1 + y_2$$

- Solución general de la homogénea

$$y_1 = C_1 \cdot \cos(K \cdot x) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(K \cdot x)$$

- Solución particular de la completa

$$y_2 = \frac{Q}{P} \cdot (l - x)$$

$$y = y_1 + y_2 = C_1 \cdot \cos(K \cdot x) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(K \cdot x) + \frac{Q}{P} \cdot (l - x)$$

Para calcular las constantes de integración C_1 y C_2 se tiene en cuenta que la tangente es nula en el empotramiento. Es decir, en $x = 0 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -C_1 \cdot K \cdot sen(K \cdot x) + C_2 \cdot K \cdot cos(K \cdot x) - \frac{Q}{P} = 0$$

$$C_2 = \frac{Q}{K \cdot P}$$

En el empotramiento el desplazamiento es nulo. Es decir, en x = 0 →y = 0

$$0 = C_1 \cdot cos\,0 + C_2 \cdot sen0 + \frac{Q}{P} \cdot l$$

$$C_1 = -\frac{Q}{P} \cdot l$$

$$y = -\frac{Q}{P} \cdot l \cdot cos(K \cdot x) + \frac{Q}{K \cdot P} \cdot sen(K \cdot x) + \frac{Q}{P} \cdot (l - x)$$

Para calcular la carga crítica, se observa que en la articulación el desplazamiento es nulo. Es decir, en $x = l \quad y = 0$

$$0 = -\frac{Q}{P} \cdot l \cdot cos(K \cdot l) + \frac{Q}{K \cdot P} \cdot sen(K \cdot l) + \frac{Q}{P} \cdot (l - l)$$

$$\frac{Q}{P} \cdot \left(\frac{1}{K} \cdot sen(K \cdot l) - l \cdot cos(K \cdot l) \right) = 0$$

Si se alcanza la carga crítica P_{cr} existirá pandeo y el valor de Q será distinto de 0. Así:

$$\frac{1}{K} \cdot sen(K \cdot l) - l \cdot cos(K \cdot l) = 0$$

$$\frac{1}{K} \cdot tag(K \cdot l) - l = 0 \rightarrow tag(K \cdot l) = K \cdot l$$

El valor mínimo para el que sucede $tag(K \cdot l) = K \cdot l = 4.49$

$$K \cdot l = 4.49 \rightarrow K = \frac{4.49}{l}$$

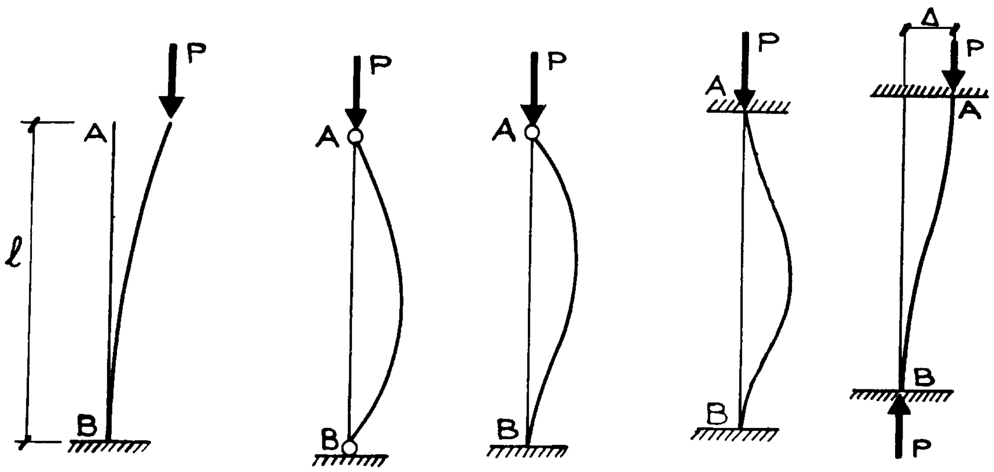
$$\frac{P_{cr}}{E \cdot I} = \left(\frac{4.49}{l} \right)^2 \rightarrow P_{cr} = \frac{20.2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(0.7 \cdot l)^2}$$

ESBELTEZ, TENSION CRITICA y LONGITUD de PANDEO

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2}$$

l_K es la **longitud de pandeo**



$l_K = 2 \cdot l$ $\quad$ $l_K = l$ $\quad$ $l_K = 0.7 \cdot l$ $\quad$ $l_K = 0.5 \cdot l$ $\quad$ $l_K = l$

$$\sigma_{cr} = \left(\frac{P_{cr}}{A}\right) = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{A \cdot l_K^2}$$

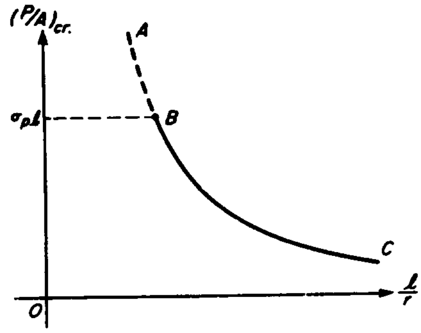
Adoptando la notación $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ para el radio de giro:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l_K}{r}\right)^2}$$

Tensión crítica de Euler

$\frac{l_K}{r}$ se denomina **Relación de esbeltez**

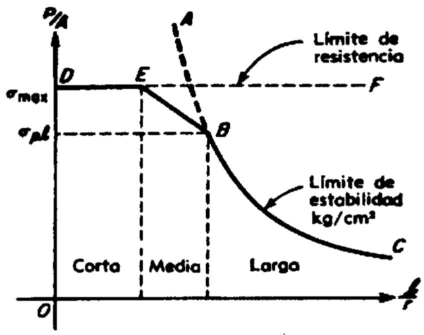
CURVA DE EULER

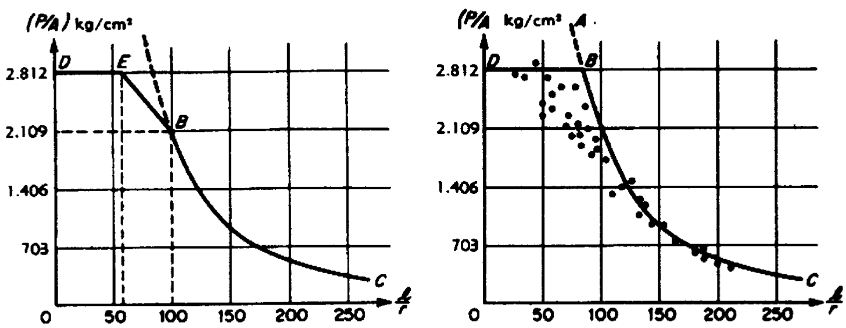


$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l_K}{r}\right)^2}$$

Haciendo $\sigma_p = \sigma_{cr}$, se obtiene un valor límite de $\frac{l_K}{r}$ por debajo del cual no es aplicable la fórmula de Euler. Este valor límite es el punto B y marca la divisoria entre columnas cortas y columnas largas.

En acero estructural, σ_p = 2100 kg/cm^2, E=2100000 kg/cm^2, $\frac{l_k}{r} = \sqrt{100 \cdot \pi^2} \approx 100$.





Curva adoptada y curva obtenida experimentalmente para acero estructural.