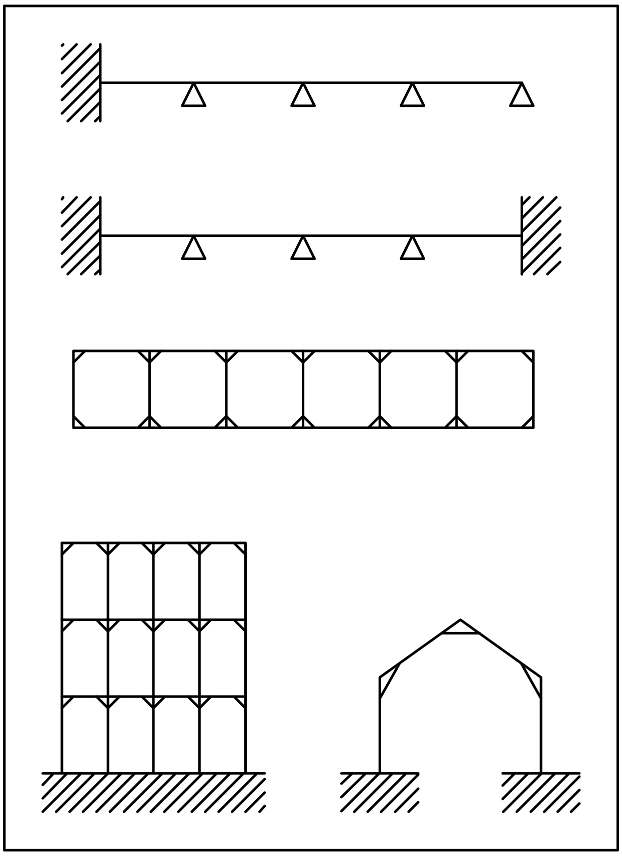
Tema 6: BASES DEL METODO DE CROSS

- Introducción a la problemática de la resolución de estructuras hiperestáticas.
- Pares de empotramiento.
- Concepto de nudo rígido.
- Factor de transmisión.
- Rigidez.
- Factor de distribución.
- Desarrollo del método para nudos giratorios sin desplazamiento.
- Propiedades de los apoyos.
- Simplificaciones.

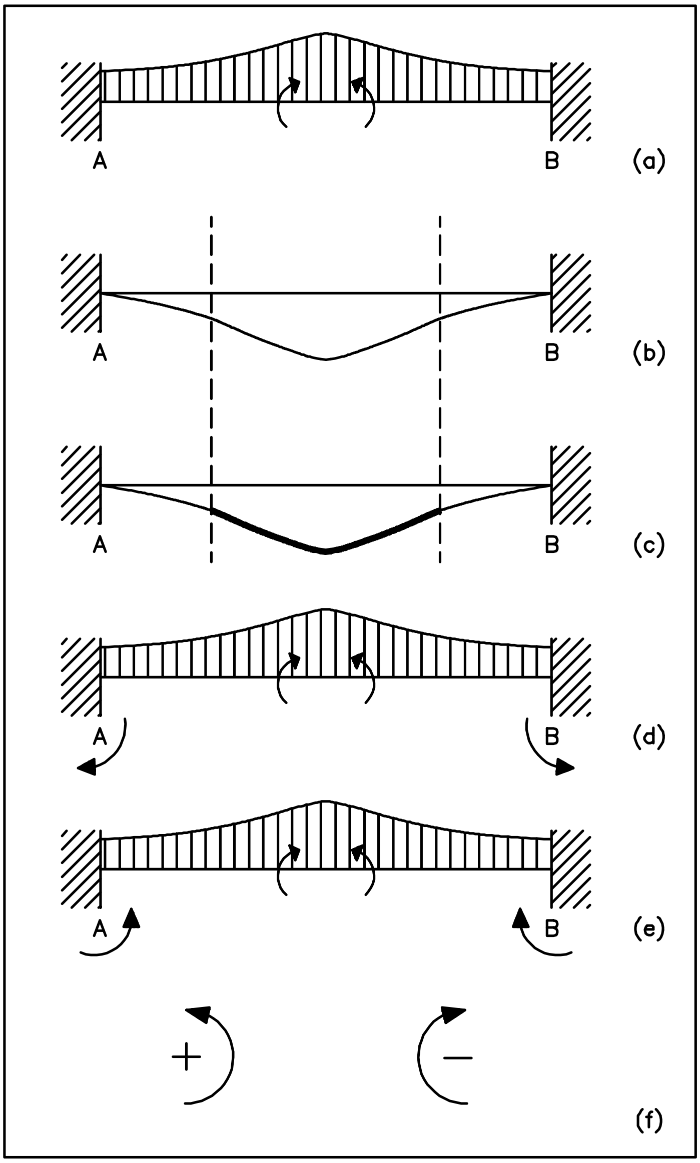
INTRODUCCION A LA PROBLEMATICA DE LA RESOLUCION DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS



Ventajas del método de Cross:

- Cálculo sencillo
- Permite seguir paso a paso el proceso de distribución de momentos en la estructura, dando un sentido físico muy claro a las operaciones matemáticas que se realizan.
- Generalidad. Es aplicable a todo tipo de estructuras.

PARES DE EMPOTRAMIENTO



(a) Viga empotrada empotrada sometida a un sistema general de acciones.

(b) Representación gráfica de la deformada.

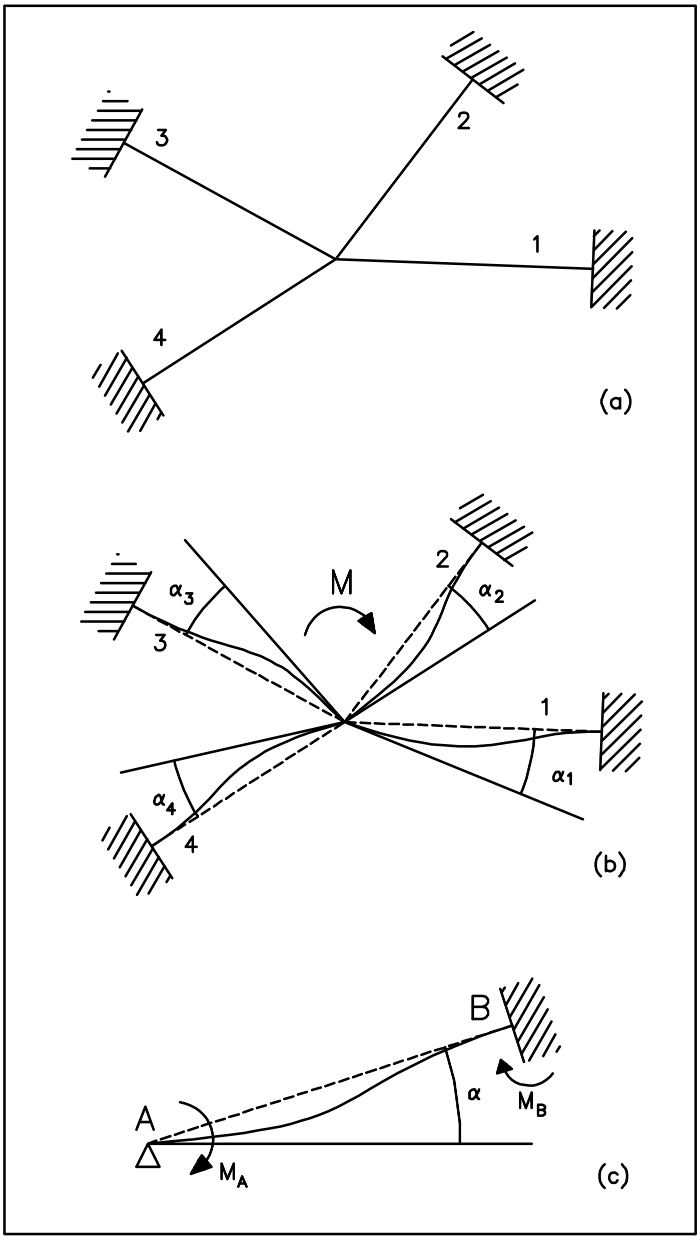
(c) Separación por tramos en función de la concavidad.

(d) Momentos que ejerce la viga sobre los apoyos.

(e) Reacción de los apoyos (Pares de empotramiento)

(f) Convenio de signos de los pares de empotramiento

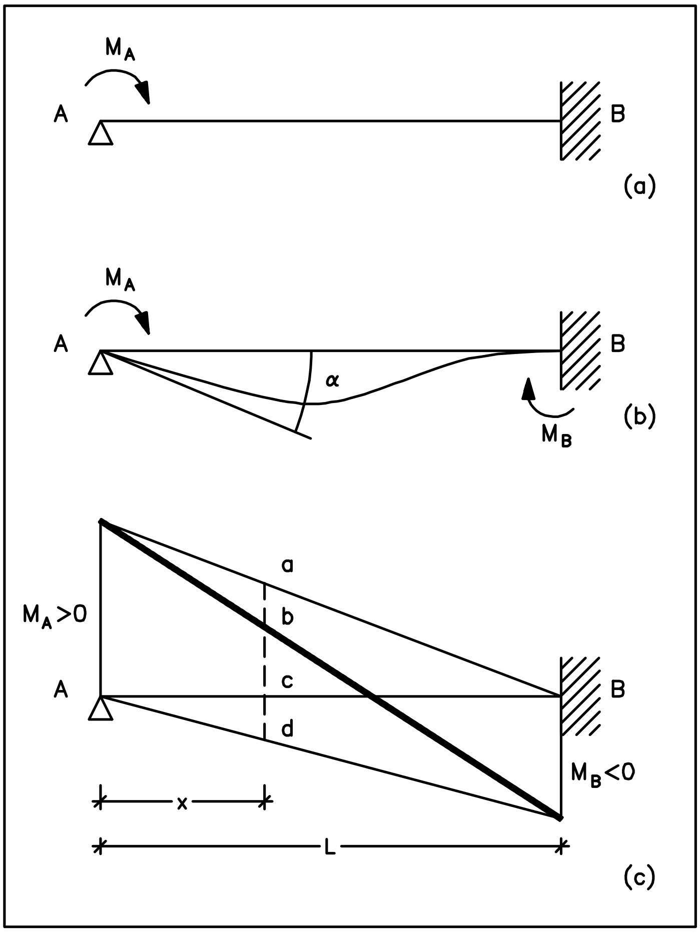
NUDO RIGIDO



Se dice que un nudo es rígido cuando los ángulos girados por todas las piezas son iguales: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n$.

Si en el nudo se aisla una barra (c), al poder girar ésta un ángulo α bajo la acción de un momento M_A, el problema se reduce al estudio de una pieza apoyada-empotrada sometida al momento de apoyo M_A.

FACTOR DE TRANSMISION



El momento flector en un punto de abcisa x será:

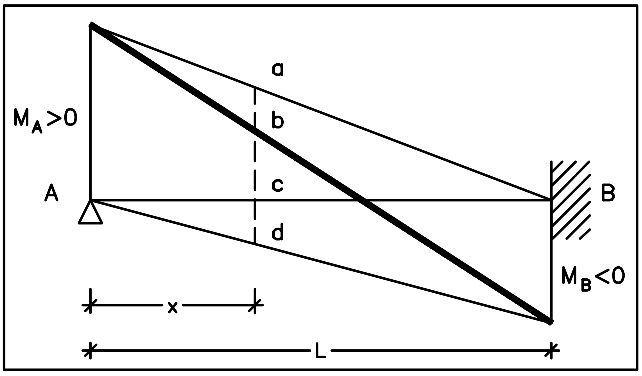
$$M_x = \overline{bc} = \overline{ac} - \overline{ab} = \overline{ac} - \overline{cd}$$

Por semejanza de triángulos, aplicando valores absolutos, se tiene:

$$\frac{\overline{ac}}{M_A} = \frac{L-x}{L} \rightarrow \overline{ac} = M_A \cdot \frac{L-x}{L}$$

$$\frac{\overline{cd}}{M_B} = \frac{x}{L} \rightarrow \overline{cd} = M_B \cdot \frac{x}{L}$$

Por tanto, $M_x = \overline{ac} - \overline{cd} = M_A \cdot \frac{L-x}{L} - M_B \cdot \frac{x}{L}$



Si se tiene en cuenta que la distancia de A a la tangente trazada por B es 0, se puede aplicar el segundo teorema de Mohr:

$$\delta = \int_0^L \frac{M_x \cdot x \cdot dx}{E \cdot I} = 0$$

Introduciendo el valor de M_x en la expresión anterior y operando, tenemos:

$$\int_0^L \frac{M_A}{E \cdot I} \cdot \frac{L - x}{L} \cdot x \cdot dx - \int_0^L \frac{M_B}{E \cdot I} \cdot \frac{x}{L} \cdot x \cdot dx = 0$$

La relación $\beta = \dfrac{M_B}{M_A}$ es el **factor de transmisión**, y su valor es:

$$\beta = \frac{\int_0^L \frac{L - x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx}{\int_0^L \frac{x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx}$$

Caso habitual: piezas de sección constante y del mismo material:

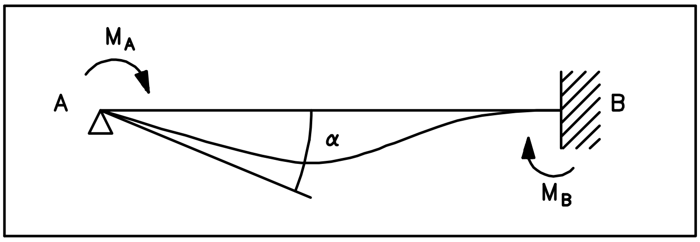
$$\beta = \frac{\int_0^L \frac{L - x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx}{\int_0^L \frac{x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx} = \frac{\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L \left(L \cdot x - x^2\right) \cdot dx}{\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L x^2 \cdot dx} = \frac{\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3}}{\frac{L^3}{3}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $\beta = \dfrac{M_B}{M_A} = \dfrac{1}{2}$, siendo M_A y M_B pares de empotramiento en valor y en signo.

Si el extremo B es una articulación, el factor de transmisión β es nulo.

Si existe una rótula en un punto intermedio de la pieza (a una distancia L_1 del origen y L_2 del extremo B), el factor de transmisión vale $\beta = \dfrac{L_2}{L_1}$.

RIGIDEZ



Para calcular el valor del ángulo girado α en función del momento aplicado M_A vamos a emplear el primer teorema de Mohr.

$$\alpha = \int_0^L \frac{M_x}{E \cdot I} \cdot dx$$

Introducimos el valor obtenido de M_x:

$$\alpha = \int_0^L \frac{M_A}{E \cdot I} \cdot \frac{L-x}{L} \cdot dx - \int_0^L \frac{M_B}{E \cdot I} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx$$

Como $\beta = \frac{M_B}{M_A} \rightarrow M_B = \beta \cdot M_A$

$$\alpha = M_A \cdot \int_0^L \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{L-x}{L} \cdot dx - \beta \cdot M_A \cdot \int_0^L \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx$$

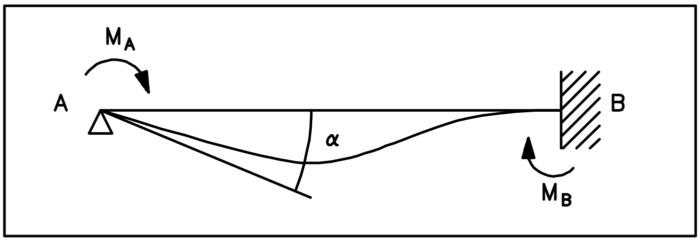
Sacando factor común M_A y sustituyendo β por su valor, se tiene:

$$\alpha = M_A \cdot \left[\int_0^L \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{L-x}{L} \cdot dx - \frac{\int_0^L \frac{L-x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx}{\int_0^L \frac{x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx} \cdot \int_0^L \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx \right]$$

α es adimensional. El valor del corchete tiene por dimensiones $\frac{1}{kg \cdot m}$.

La expresión anterior puede expresarse de la forma $\alpha = \frac{M}{K}$, siendo K la **rigidez de la pieza**. Por tanto, la rigidez es el momento que hace girar a una pieza un ángulo de un radian.

RIGIDEZ (cont.)



Si se considera constante I y E:

$$\alpha = M_A \cdot \left[\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L \frac{L-x}{L} \cdot dx - \frac{\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L (L-x) \cdot x \cdot dx}{\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L x^2 \cdot dx} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L \frac{x}{L} \cdot dx \right]$$

$$\alpha = M_A \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\left(L - \frac{L^2}{2 \cdot L} \right) - \frac{\left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right)}{\frac{L^3}{3}} \cdot \frac{L^2}{2 \cdot L} \right] = M_A \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{L}{4}$$

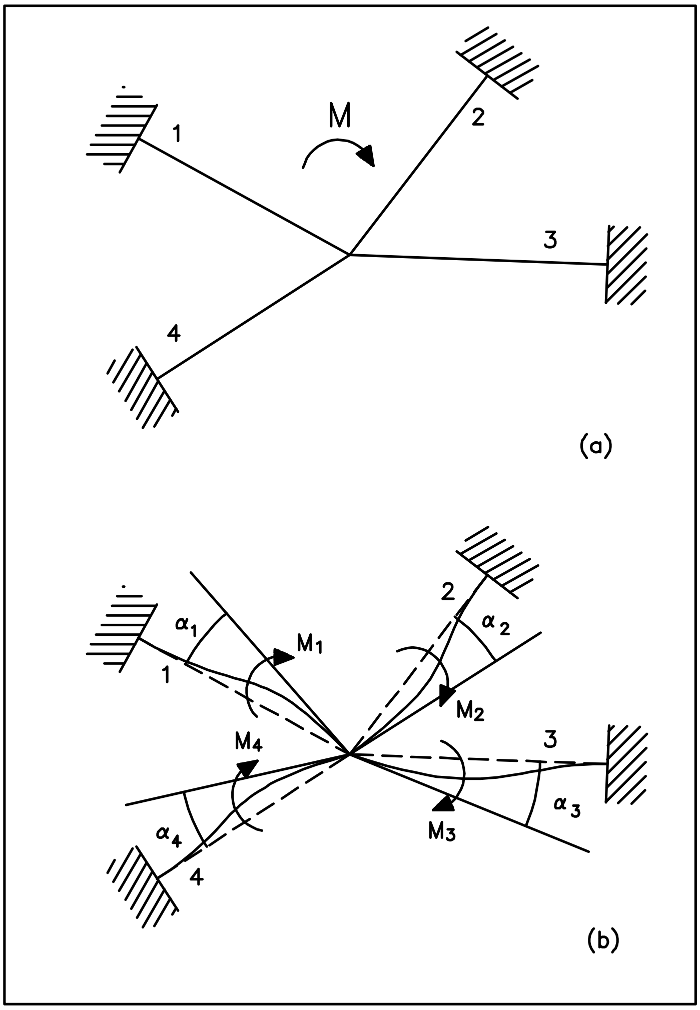
Por tanto, $K = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$.

Si el nudo es un empotramiento perfecto, $K = \infty$.

Si el extremo opuesto B es articulado, $K = \frac{3}{4} \cdot \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L}$.

Si el nudo A es una articulación móvil perfecta, $K = 0$.

FACTOR DE DISTRIBUCION O DE REPARTO



$M = M_1 + M_2 + ... + M_n$. Cada una de las barras gira un cierto ángulo α_i.:

$$\alpha_1 = \frac{M_1}{K_1}; \quad \alpha_2 = \frac{M_2}{K_2}; ...; \alpha_n = \frac{M_n}{K_n}$$

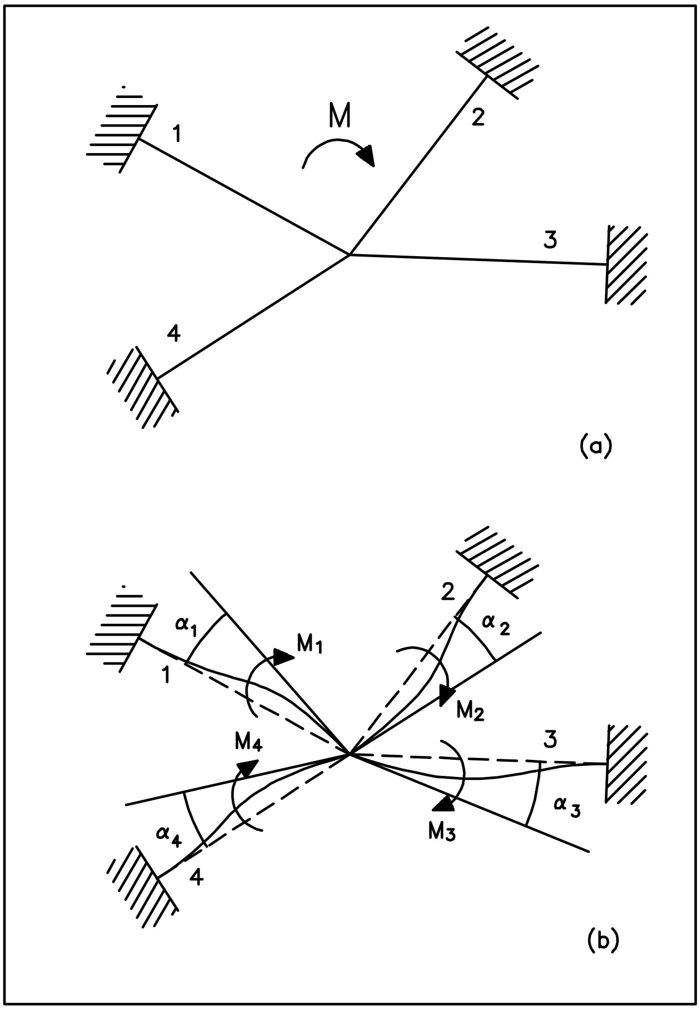
siendo K_i la rigidez de una barra genérica.

Si el nudo es rígido, los ángulos girados son iguales. Por tanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$, o bien:

$$\frac{M_1}{K_1} = \frac{M_2}{K_2} = ... = \frac{M_n}{K_n} = \frac{M_1 + M_2 + ... + M_n}{K_1 + K_2 + ... + K_n} = \frac{\sum M_i}{\sum K_i}$$

siendo $\sum M_i = M$ el momento que actúa sobre el nudo.

FACTOR DE DISTRIBUCION O DE REPARTO



Desarrollando el sistema de ecuaciones se obtiene la siguiente serie:

$$M_1 = M \cdot \frac{K_1}{\sum K_i}$$

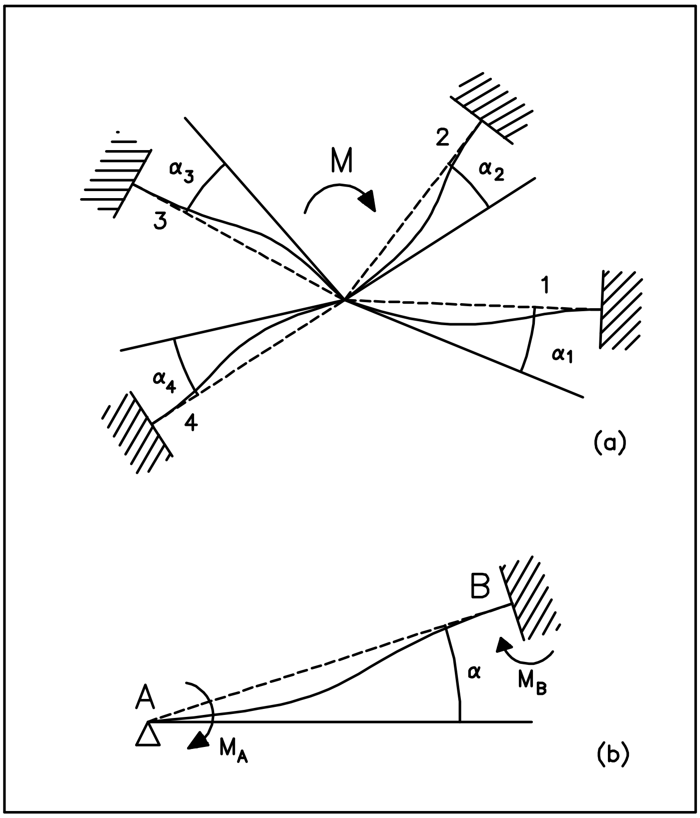
$$M_2 = M \cdot \frac{K_2}{\sum K_i}$$

$$\dots$$

$$M_n = M \cdot \frac{K_n}{\sum K_i}$$

A los factores $r_i = \frac{K_i}{\sum K_i}$ se les llama **factores de reparto o de distribución**. Sumando la serie anterior se comprueba que $\sum r_i = 1$.

BASES DEL METODO DE CROSS



1. Hallar la relación entre el momento M_A y el par de empotramiento M_B (factor de transmisión).

2. Calcular la magnitud del ángulo girado α en función del momento aplicado M_A (rigidez).

3. Encontrar la relación entre el momento aplicado en un nudo M (a) y el momento M_A (b) que actúa sobre cada una de las barras de nudo (factor de reparto o de distribución).

PROPIEDADES DE LOS APOYOS

- Cuando una pieza termina en un **apoyo aislado** se la considera unida a otra de rigidez nula.

  El factor de reparto vale la unidad $\left(r_i = \dfrac{K_i}{K_i + 0} = 1 \right)$.

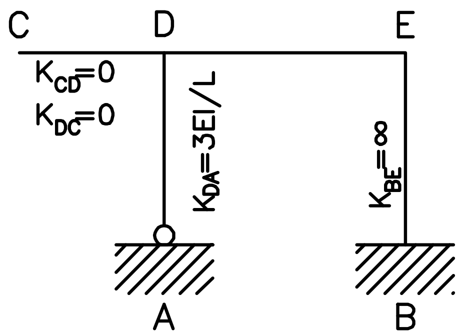
  Se puede decir que una articulación no absorbe nada, todo lo transmite (K=0, β=1).

- Cuando una pieza termina en un **empotramiento perfecto** se supone que está unida a otra de rigidez infinita.

  El factor de reparto es nulo $\left(r_i = \dfrac{K_i}{K_i + \infty} = 0 \right)$.

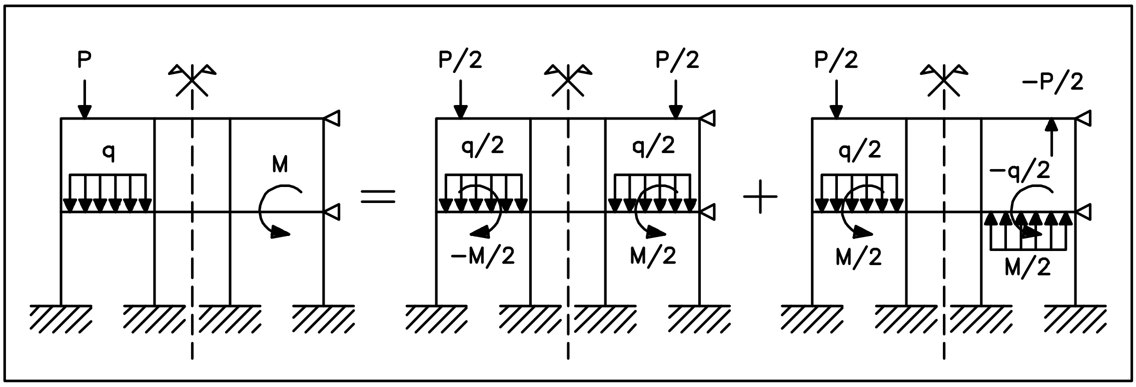
  Un empotramiento perfecto lo absorbe todo, no transmite nada (K=∞, β=0).

- En el caso de una **viga en voladizo** la rigidez es nula.

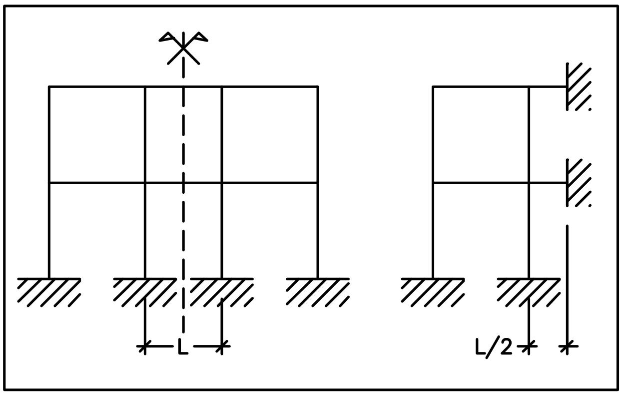


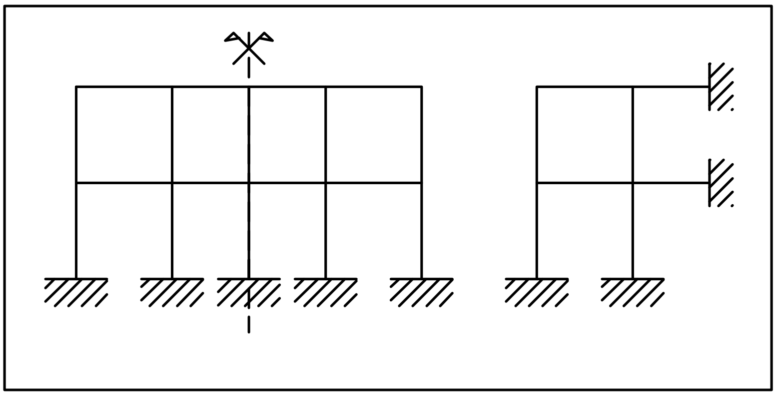
SIMPLIFICACIONES

Teorema de Andrée: Cualquier estado de carga (P, M, q) actuando sobre una estructura simétrica puede descomponerse en la suma de cargas de valor mitad y sus simétricas, más otro estado de carga de valor mitad y sus antimétricas.

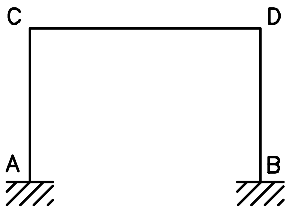
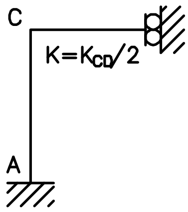
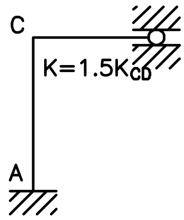
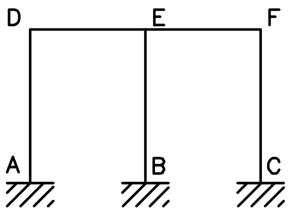
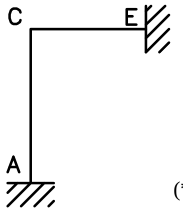
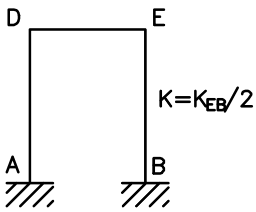
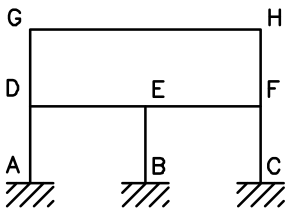
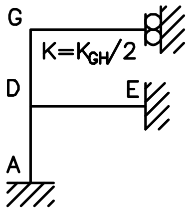
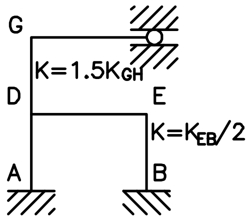
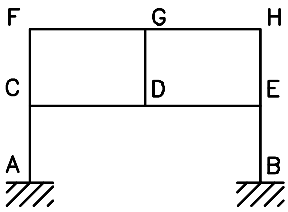
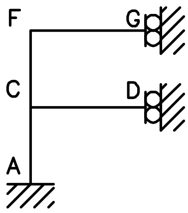
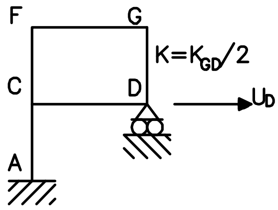


En los casos de **estructuras simétricas con cargas simétricas** se pueden realizar dos simplificaciones, en función de que el eje de simetría de la estructura coincida con el punto medio de un vano o con una pieza estructural.





SIMPLIFICACIONES

Tabla 1 **Simplificaciones en estructuras simétricas**		
	Esquema simplificado de cálculo	
Estructura en estudio	Carga simétrica	Carga antisimétrica
		
	 (*)	
		
		

(*) Los momentos de empotramiento perfecto de las barras cortadas corresponden a los de la barra entera CD.