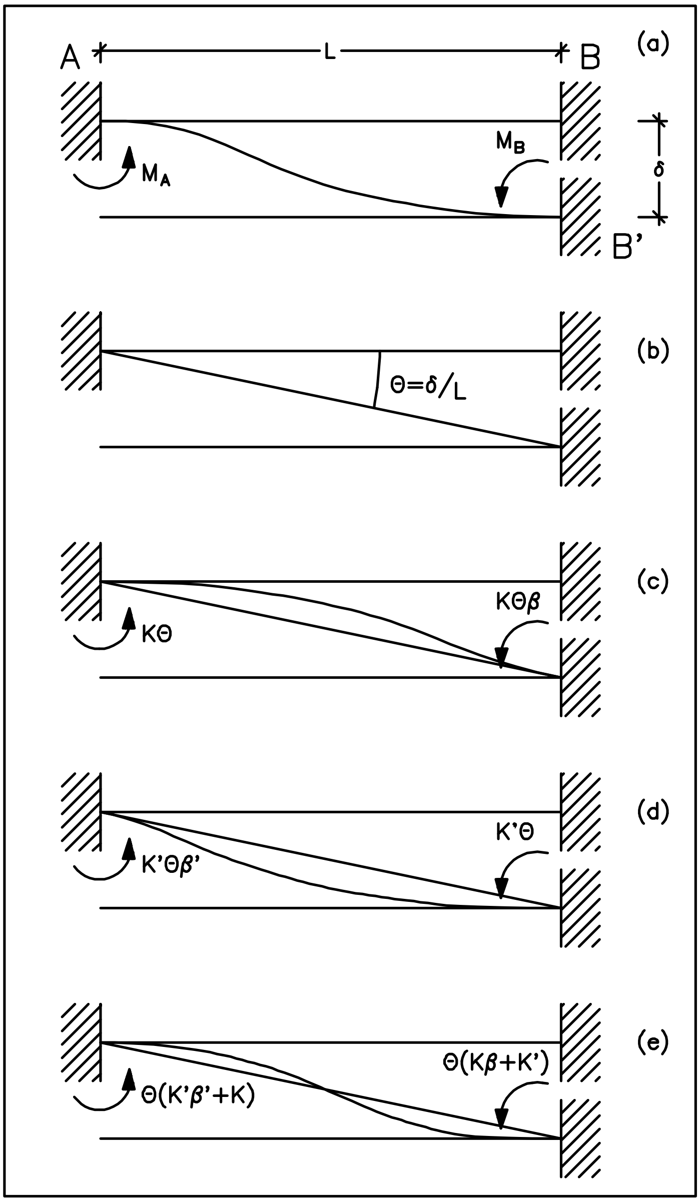
ingeniería
RURAL

Tema 7: EL METODO DE CROSS APLICADO A ESTRUCTURAS TRANSLACIONALES

- Relaciones entre desplazamiento y pares de empotramiento.
- Relaciones entre fuerzas y pares de empotramiento.
- Relaciones entre fuerzas y desplazamientos.
- Resumen de conclusiones.
- Simplificaciones estructurales en los casos más usuales.
- Desarrollo del método para estructuras con nudos desplazables.

RELACION entre DESPLAZAMIENTOS y PARES DE EMPOTRAMIENTO



Se suponen rigideces K y K', y factores de transmisión β y β', según se considere el extremo origen.

$$\mathrm{tag}\theta = \theta = \frac{\delta}{L}$$

Sustituyendo θ por su tangente $\frac{\delta}{L}$, los pares de empotramiento valen:

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K)$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K')$$

Si I y E son constantes, $\beta = \beta' = \frac{1}{2}$; $K = K' = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$. Operando se obtiene:

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K) = \frac{\delta}{L} \cdot \left(\frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \right) = \frac{4 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2}$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K') = \frac{\delta}{L} \cdot \left(\frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \right) = \frac{4 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2}$$

Por tanto, $M_A = M_B = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2}$.

Si la pieza es empotrada-articulada, $M_A = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2}$.

Si la **situación** de partida es la **inversa**, es decir, si se conocen los pares de empotramiento M_A y M_B en una pieza que puede desplazarse de B a B', se obtiene el desplazamiento δ por cualquiera de las relaciones siguientes:

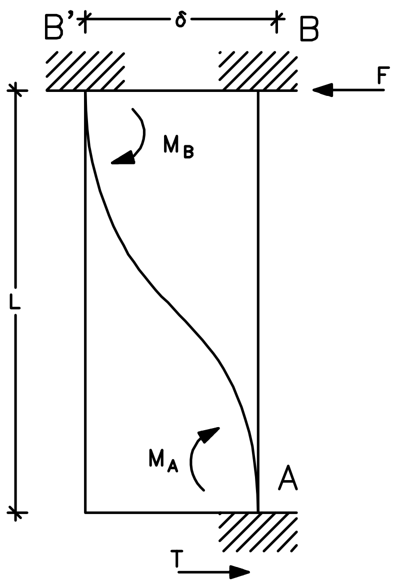
$$\delta = \frac{M_A \cdot L}{K' \cdot \beta' + K}$$

$$\delta = \frac{M_B \cdot L}{K \cdot \beta + K'}$$

Si I y E son constantes:

$$\delta = \frac{M_A \cdot L^2}{6 \cdot E \cdot I} = \frac{M_B \cdot L^2}{6 \cdot E \cdot I}$$

RELACION entre FUERZAS y PARES DE EMPOTRAMIENTO



Al llegar a una posición de equilibrio, se cumple:

$$\sum M = 0 \qquad (1)$$

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$\sum F = 0 \qquad (2)$$

$$T - F = 0$$

Para poder calcular estos pares de empotramiento es necesario recurrir a las expresiones obtenidas al estudiar las relaciones entre desplazamientos y pares de empotramiento y así disponer del siguiente sistema:

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K)$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K')$$

Haciendo

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{K'\cdot\beta'+K}{K\cdot\beta+K'} = \phi\,, \quad M_A = M_B\cdot\phi\,,$$

de donde se obtiene:

$$F\cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$F\cdot L - M_B\cdot\phi - M_B = 0$$

$$M_B = \frac{F\cdot L}{1+\phi}$$

$$M_A = \frac{F\cdot L\cdot\phi}{1+\phi}$$

Si sucede que las piezas son de sección constante y del mismo material, $\beta = \frac{1}{2}$; y $K = \frac{4\cdot E\cdot I}{L}$. Operando se tiene:

$$\phi = \frac{K'\cdot\beta'+K}{K\cdot\beta+K'} = \frac{\frac{4\cdot E\cdot I}{L}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L}}{\frac{4\cdot E\cdot I}{L}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L}} = 1$$

$$M_A = \frac{F\cdot L\cdot\phi}{1+\phi} = \frac{F\cdot L}{2}$$

$$M_B = \frac{F\cdot L}{1+\phi} = \frac{F\cdot L}{2}$$

Por tanto, $M_A = M_B = \frac{F\cdot L}{2}$.

Si la **situación** de partida es la **inversa**, es decir, si se conocen los pares de empotramiento M_A y M_B en una pieza que puede desplazarse de B a B', se obtiene la fuerza mediante la siguiente ecuación:

$$F\cdot L - M_A - M_B = 0 \rightarrow F = \frac{M_A + M_B}{L}$$

RELACION entre EMPUJES y DESPLAZAMIENTOS

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K)$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K')$$

Eliminamos los pares de las expresiones anteriores, así se obtiene la fuerza en función del desplazamiento.

$$F \cdot L - \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K) - \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K') = 0$$

Despejando F:

$$F = \frac{\delta}{L^2} \cdot [K' \cdot (1 + \beta') + K \cdot (1 + \beta)]$$

Si se realiza la simplifación de suponer las piezas de sección constante y del mismo material, se obtiene:

$$F = \frac{\delta}{L^2} \cdot [K' \cdot (1 + \beta') + K \cdot (1 + \beta)] = \frac{\delta}{L^2} \cdot \left(\frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right)$$

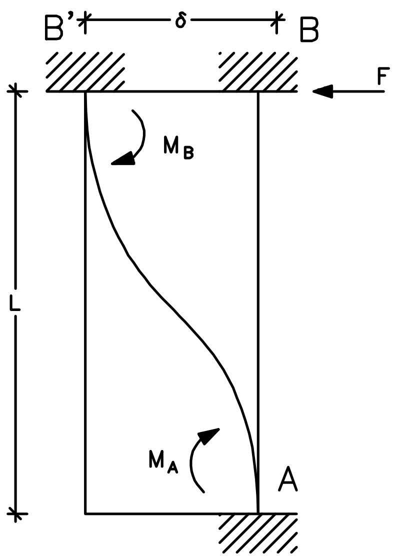
$$F = \frac{12 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^3}$$

Al igual que en los casos anteriores, es inmediato obtener **la relación inversa**; en este caso la obtención del desplazamiento en función de la fuerza F:

$$\delta = \frac{F \cdot L}{[K' \cdot (1 + \beta') + K \cdot (1 + \beta)]}$$

RESUMEN

	Conocidos		
Desconocidos	Desplazamientos	Fuerzas	Momentos
Desplazamientos		3	1
Fuerzas	3		2
Momentos	1	2	



La relación entre todos los factores viene determinada por el sistema:

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K)$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K')$$

GRADO DE TRANSLACIONALIDAD o GRADO DE DESPLAZABILIDAD

El grado de translacionalidad o grado de desplazabilidad de una estructura es el número desplazamientos posibles en la misma que resultan ser linealmente independientes entre sí.

Es el número de reacciones exteriores que es necesario añadir para que la estructura sea intranslacional.